



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A  
BIOMECHANIKY**

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

**NÁVRH A ŘÍZENÍ MODELU LABORATORNÍHO  
DVOJITÉHO KYVADLA**

DESIGN AND CONTROL OF LABORATORY DOUBLE PENDULUM MODEL

**DIPLOMOVÁ PRÁCE**

MASTER'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

**Bc. Tomáš Kirchner**

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

**Ing. Michal Bastl**

**BRNO 2020**

## **Abstrakt**

Práce se zabývá úpravou existujícího modelu dvojitého inverzního kyvadla na vozíku, aplikací nového LQG řízení a realizací funkce swing-up. Pohyb vozíku je řízen stejnosměrným motorem a mechanismem ozubeného řemenu. Řídicí algoritmy byly nejprve simulovány v programu Simulink a následně přeneseny na reálnou soustavu s využitím karty MF624.

## **Summary**

Improvement of the current double inverted pendulum model on a cart as well as a new LQG control and swing-up realization are the main goal of this thesis. Movement of the cart is driven by DC motor and gear belt mechanism. At first the control algorithms were simulated in Simulink program and then also implemented into the real system with MF624 card.

## **Klíčová slova**

Dvojité inverzní kyvadlo na vozíku, ozubený řemen, pohybové rovnice, identifikace parametrů, Kálmánův filtr, stabilizace, LQG, swing-up

## **Keywords**

Double inverted pendulum on a cart, gear belt, dynamic equations, parameters estimation, Kalman filter, stabilization, LQG, swing-up

## **Citace elektronického zdroje:**

KIRCHNER, Tomáš. *Návrh a řízení modelu laboratorního dvojitého kyvadla* [online]. Brno, 2020 [cit. rrrr-mm-dd]. Dostupné z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/125124>. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce Michal Bastl.

# Zadání diplomové práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	<b>Bc. Tomáš Kirchner</b>
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Mechatronika
Vedoucí práce:	<b>Ing. Michal Bastl</b>
Akademický rok:	2019/20

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č. 111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

## Návrh a řízení modelu laboratorního dvojitého kyvadla

### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Úkolem diplomové práce je převzít současný stav modelu dvojitého kyvadla. Model vznikl jako výstup diplomové práce v roce 2018. Předpokládá se, že student naváže na výsledky právě této práce. Jeho úkolem bude návrh nové mechanické části, která byla v minulosti zdrojem problémů. Předpokládá se také vylepšení elektroniky. Dále zopakuje výsledky předchozí práce a implementuje řízení na novém modelu. Nejpodstatnější část je návrh tzv. swing-up funkce, která vyšvihne kyvadlo do inverzní polohy. Student by se měl pokusit dosáhnout robustní realizace této funkce.

### **Cíle diplomové práce:**

- 1) V rešeršní části provedte průzkum dostupných zdrojů na téma řízení dvojitého kyvadla a na možnosti realizace swing-up funkce. Toto téma bylo předmětem vědeckých článků.
- 2) Upravte mechanickou konstrukci kyvadla. Snažte se zachovat nízké náklady na konečný model kyvadla. Popište, proč jste zvolil právě takové řešení.
- 3) Navrhněte řídicí elektroniku kyvadla. Jedná se o zpracování snímačů ze sensoriky a výkonovou část. Za tímto účelem použijte dostupný hardware v Laboratoři Mechatroniky. (Např. jednotku ESCON).
- 4) Implementujte stavové řízení v tzv. LQG formě. V podstatě zopakujte výsledky předchozí práce na novém modelu. Pokuste se o zlepšení řízení.
- 5) Navrhněte a realizujte swing-up funkci kyvadla. Zvažte více přístupů k cíli. Výsledkem by měl překonávat původní práci. Snažte se dosáhnout toho, aby vyšvihnutí skutečně proběhlo ve většině případů.

### **Seznam doporučené literatury:**

TAKÁCS, Gergely a Martin GULAN. Základy prediktívneho riadenia. Bratislava: Slovenská technická univerzita v Bratislave, 2018. ISBN 9788022748261.

FRANKLIN, Gene F., J. David POWELL a Michael L. WORKMAN. Digital control of dynamic systems. 3rd ed. Menlo Park, Calif.: Addison-Wesley, c1998. ISBN 0201331535.

ASTROM, Karl J. a Richard M. MURRAY. Feedback systems: an introduction for scientists and engineers. 2008. Princeton: Princeton University Press, c2008. ISBN 0691135762.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2019/20

V Brně, dne

L. S.

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité zdroje a literaturu.

Bc. Tomáš Kirchner

Upřímně moc děkuji všem, kteří mi s touto diplomovou prací pomohli nebo za mnou stáli a podporovali mě.

Bc. Tomáš Kirchner

# Obsah

1	Úvod.....	2
2	Formulace problému .....	3
3	Teoretická část.....	4
3.1.	Odvození matematického modelu.....	4
3.1.1.	Lagrangeovy rovnice .....	5
3.1.2.	Linearizace .....	7
3.2.	Stabilizace .....	8
3.2.1.	Lineárně-kvadratický regulátor (LQR) .....	8
3.2.2.	Feedback linearizace (FBL) .....	9
3.2.3.	Sliding mode control (SMC) .....	11
3.3.	Kálmánův filtr .....	12
3.4.	Swing-up řešerše.....	13
3.4.1.	Boundary value problem (BVP) s volnými parametry.....	14
3.4.2.	Přirozený pohyb s částečnou linearizací .....	15
3.4.3.	Metoda Víta Slabého.....	17
3.5.	Stávající model kyvadla a převzaté prvky .....	17
4	Praktická část .....	21
4.1.	Úprava mechaniky .....	21
4.2.	Úprava elektroniky.....	25
4.3.	Simulace systému.....	28
4.3.1.	Ověření rovnic.....	28
4.4.	Odhad parametrů soustavy .....	30
4.5.	LQG řízení.....	37
4.6.	Swing-up.....	40
4.7.	Zapojení a program .....	50
5	Závěr.....	52
6	Použitá literatura a odkazy .....	53
7	Použité symboly a zkratky.....	56

# 1 Úvod

Nelineární, nestabilní anebo podaktuované systémy lze obecně velmi nesnadně kontrolovat. Proto platí za výzvu a jsou předmětem mnoha technických zpráv, studentských projektů a akademických prací. Jejich cílem není vždy sestavit prakticky přínosné zařízení – spíše vyvinout nebo vylepšit již existující řídicí algoritmy. A ať už simulačně nebo i experimentálně následně obecně ověřit jejich použitelnost.

Motivací této diplomové práce bylo především prakticky demonstrovat teoretické postupy řízení na reálném modelu dvojitého inverzního kyvadla. Není totiž mnoho publikací, které se věnují aplikování navrhnutých algoritmů na reálném mechanismu.

Do jisté míry bylo navázáno na výsledky diplomové práce Ing. Víta Slabého [2]. Je ale nutné zmínit, že mechanická část, stejně jako elektronika byla z velké části přestavěna. Z tohoto důvodu se následný postup odvození matematického modelu, identifikace parametrů, ladění LQG pro stabilizaci i hledání trajektorií swing-upu a jeho provedení významně liší.

Práce je členěna do dvou hlavních částí. První z nich představuje teoretický základ pro část následující. Sestává z vysvětlení použitých pojmů, řešerše studované oblasti stabilizace a swing-upu. Její součástí je také odvození pohybových rovnic a prezentace stávajícího modelu dvojitého kyvadla. V druhé části je pak popsána použitá cesta k praktickému naplnění cílů této diplomové práce, včetně dosažených výsledků. Bylo třeba upravit mechanickou část a elektroniku převzatého modelu, za účelem zvýšení robustnosti a obecně zlepšení kvality řízení. Dále aplikovat lineární kvadratický regulátor a Kálmánův filtr a jako poslední realizovat funkci swing-up.

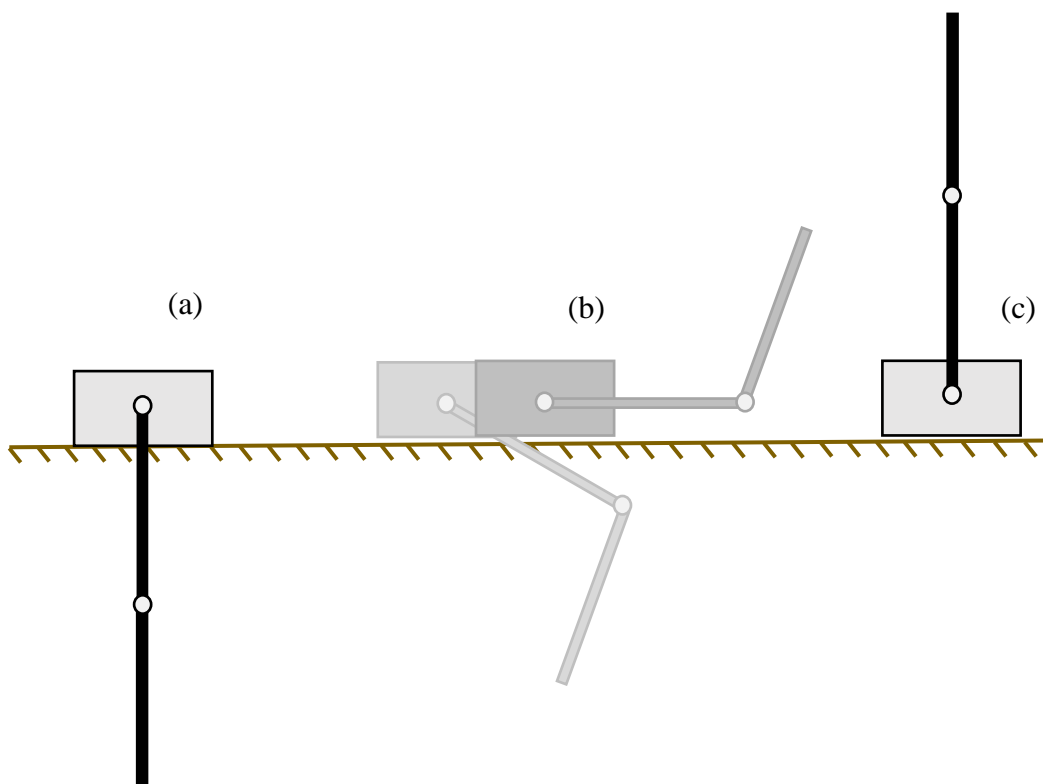


## 2 Formulace problému

Model dvojitého inverzního kyvadla použitý v experimentální části této diplomové práce sestává z několika částí. Vozíku pohybujícím se po lineárním vedení a dvou kyvadel, která jsou s vozíkem a spolu navzájem propojena rotační vazbou (viz obrázek 3-1). Vstupem do soustavy je moment stejnosměrného motoru, který je přenášen ozubeným řemenem jako síla na vozík.

Soustava má dvě rovnovážné polohy, ve kterých jde systém stabilizovat – horní (inverzní) a dolní, viz obrázek 2-1 (a) a (c). Zatímco dolního ekvilibria dosáhne systém (s tlumícím prvkem) v končeném čase vždy, k udržení inverzní polohy je v reálných podmínkách potřeba regulace. Stabilizaci dvojitého inverzního kyvadla je dále v práci rozuměna regulace s cílem udržení jeho inverzní polohy.

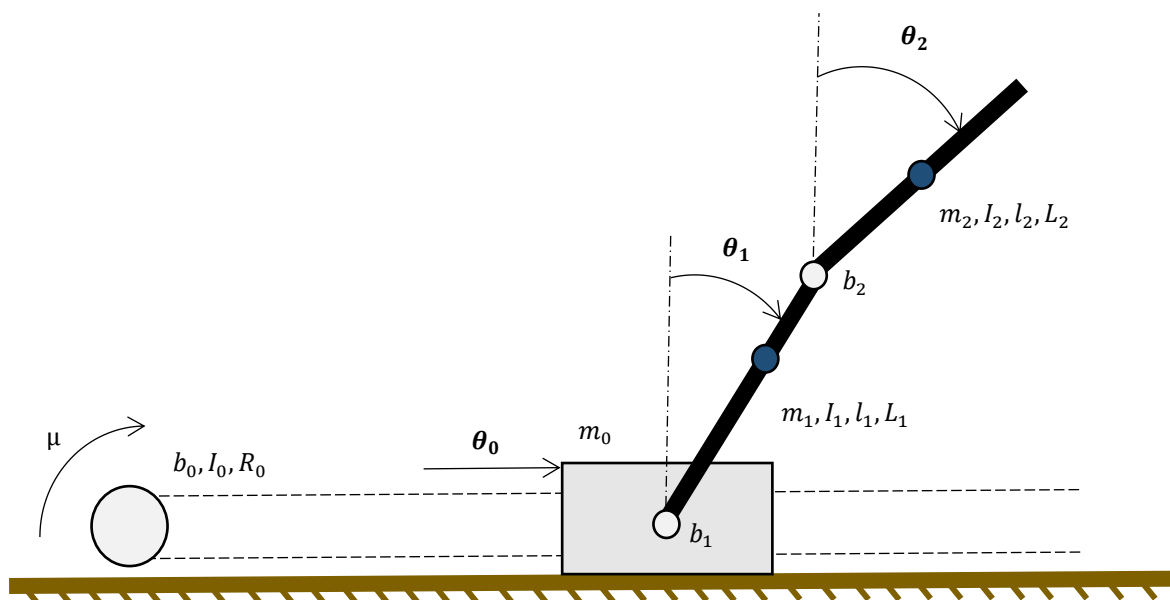
Dalším úkolem řídicího programu má být tzv. swing-up (výšvih). Tento termín označuje uskutečnění takového pohybu vozíku, který soustavu z dolní rovnovážné polohy dovede do inverzní. Situace je naznačena na obrázku 2-1 (c). Požadavkem na regulaci je především robustnost a opakovatelnost swing-upu.



2-1 – (a) dolní rovnovážná poloha; (b) swing-up; (c) horní rovnovážná poloha

### 3 Teoretická část

První oddíl této diplomové práce má sloužit jako teoretický základ pro následující praktickou část. Popisuje získání matematického modelu systému, věnuje pozornost stavu laboratorního modelu při převzetí a řeší v oblasti stabilizace a swing-up funkce dvojitého inverzního kyvadla.



3-1 – Schéma modelu dvojitého inverzního kyvadla

#### 3.1. Odvození matematického modelu

Obrázek 3-1 schematicky zobrazuje model dvojitého inverzního kyvadla. Význam jednotlivých veličin je patrný z obrázku. Jejich slovní popis lze nalézt v kapitole *Použité symboly a zkratky*.

Systém má tři stupně volnosti – posuvný pohyb vozíku a rotační pohyby dvou kyvadel. Je sestaven vektor stavových veličin jako posun vozíku, resp. natočení kyvadel a rychlost vozíku, resp. úhlové rychlosti kyvadel, tedy:

$$\boldsymbol{\theta} = [\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_0, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2]^T \quad (3.1)$$

pro vstup  $u$  problém získání matematického modelu představuje hledání pohybové rovnice ve tvaru:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}, u) \quad (3.2)$$

k tomu byly využity Lagrangeovy rovnice II. druhu.

### 3.1.1. Lagrangeovy rovnice

Matematický model dvojitého inverzního kyvadla lze vyjádřit jako součet, resp. rozdíl parciálních derivací mechanických energií podle příslušných nezávislých proměnných a jejich derivací, jako:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \theta_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_i} + \frac{\partial E_p}{\partial \theta_i} = \frac{\partial W_e}{\partial \theta_i} = \frac{\partial P_e}{\partial \dot{\theta}_i}, \quad (3.3)$$

kde  $E_k$  je kinetická a  $E_p$  potenciální energie.  $D$  značí disipativní složku,  $W_e$  práci vnějších sil a  $P_e$  jejich výkon. Pro jednotlivá tělesa lze vyjádřit (srovnáno s [1] [2]):

#### Kinetickou energii

Vozík vykonává translační a kyvadla obecný rovinný pohyb. Moment setrvačnosti otáčivých částí pohonu (řemenice, hřídeli, ...) lze redukovat k hmotnosti vozíku, neboť rychlost vozíku je rovna obvodové rychlosti řemenic. Rychlosti těžišť kyvadel lze získat časovou derivací vektoru jejich polohy.

$$E_{k0} = \frac{1}{2} m_0 \dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2 = \frac{1}{2} m_0 \dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2} \frac{I_0}{R_0^2} \dot{\theta}_0^2 = \frac{1}{2} m_{0\text{red}} \dot{\theta}_0^2 \quad (3.4)$$

$$E_{k1} = \frac{1}{2} m_1 \left[ (\dot{\theta}_0 + l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1)^2 + (l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1)^2 \right] + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 \quad (3.5)$$

$$E_{k2} = \frac{1}{2} m_2 \left[ (\dot{\theta}_0 + L_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 + (L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2 \right] + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 \quad (3.6)$$

#### Potenciální energii

$$E_{p0} = 0 \quad (3.7)$$

$$E_{p1} = m_1 g l_1 \cos \theta_1 \quad (3.8)$$

$$E_{p2} = m_2 g (L_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \quad (3.9)$$

#### Disipativní složku

$$D_0 = \frac{1}{2} b_0 \dot{\theta}_0^2 \quad (3.10)$$

$$D_1 = \frac{1}{2} b_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} b_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2 \quad (3.11)$$

$$D_2 = \frac{1}{2} b_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2 \quad (3.12)$$

### Výkon vnějších sil

Jediným vstupem do soustavy je moment  $\mu$  na hřídeli motoru. Pro lepší představu však byly rovnice odvozeny pro sílu na vozík  $F$ . Mezi těmito dvěma veličinami platí jednoduchý vztah přímé úměry:

$$\mu = FR_0, \quad (3.13)$$

kde  $R_0$  je poloměr řemenice. Potom výkon vnější síly je dán:

$$P_e = F\dot{\theta}_0 \quad (3.14)$$

### Výsledné rovnice

Dosazením výše uvedených rovnic do (3.3) je získána výsledná pohybová rovnice, kterou lze zapsat do standardního maticového tvaru:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\mathbf{q}) = \mathbf{H}u \quad (3.15)$$

$$\mathbf{q} = [\theta_0, \theta_1, \theta_2], \quad (3.16)$$

se zavedením matic:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \cos \theta_1 & d_3 \cos \theta_2 \\ d_2 \cos \theta_1 & d_4 & d_5 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ d_3 \cos \theta_2 & d_5 \cos(\theta_1 - \theta_2) & d_6 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} b_0 & -d_2 \sin(\theta_1)\dot{\theta}_1 & -d_3 \sin(\theta_2)\dot{\theta}_2 \\ 0 & b_1 + b_2 & d_5 \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_2 - b_2 \\ 0 & d_5 \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1 - b_2 & b_2 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -d_2 g \sin \theta_1 \\ -d_3 g \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{H} = [1, 0, 0]^T, \quad (3.20)$$

a kde význam jednotlivých prvků je:

$$d_1 = m_{0_{\text{red}}} + m_1 + m_2 \quad (3.21)$$

$$d_2 = m_1 l_1 + m_2 L_1 \quad (3.22)$$

$$d_3 = m_2 l_2 \quad (3.23)$$

$$d_4 = m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1 \quad (3.24)$$

$$d_5 = m_2 L_1 l_2 \quad (3.25)$$

$$d_6 = m_2 l_2^2 + I_2 \quad (3.26)$$

Pohybovou rovnici v hledaném tvaru (3.2) lze získat:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{H} \end{bmatrix} u, \quad (3.27)$$

kde  $\mathbf{0}$  reprezentuje nulovou a  $\mathbf{I}$  jednotkovou matici odpovídajících rozměrů.

### 3.1.2. Linearizace

Pro návrh lineárního regulátoru je potřeba nelineární pohybovou rovnici nejprve linearizovat. Běžně se provádí aproximace okolo jmenovitého pracovního bodu  $(\boldsymbol{\theta}_n, u_n)$  prvními členy Taylorovy řady:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\boldsymbol{\theta}}_n + \Delta\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}_n, u_n) + \frac{\partial \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}_n, u_n)}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Delta\boldsymbol{\theta} + \frac{\partial \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}_n, u_n)}{\partial u} \Delta u, \quad (3.28)$$

kde matice parciálních derivací podle všech stavů a vstupu jsou:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}_n, u_n)}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(\boldsymbol{\theta}_n, u_n)}{\partial \theta_0} & \ddots & \frac{\partial F_1(\boldsymbol{\theta}_n, u_n)}{\partial \dot{\theta}_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_6(\boldsymbol{\theta}_n, u_n)}{\partial \theta_0} & \ddots & \frac{\partial F_6(\boldsymbol{\theta}_n, u_n)}{\partial \dot{\theta}_2} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}_n, u_n)}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(\boldsymbol{\theta}_n, u_n)}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_6(\boldsymbol{\theta}_n, u_n)}{\partial u} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$F_i$  představují jednotlivé řádky pohybové rovnice (3.27). Zlinearizovanou rovnici je následně možné psát ve standardním tvaru:

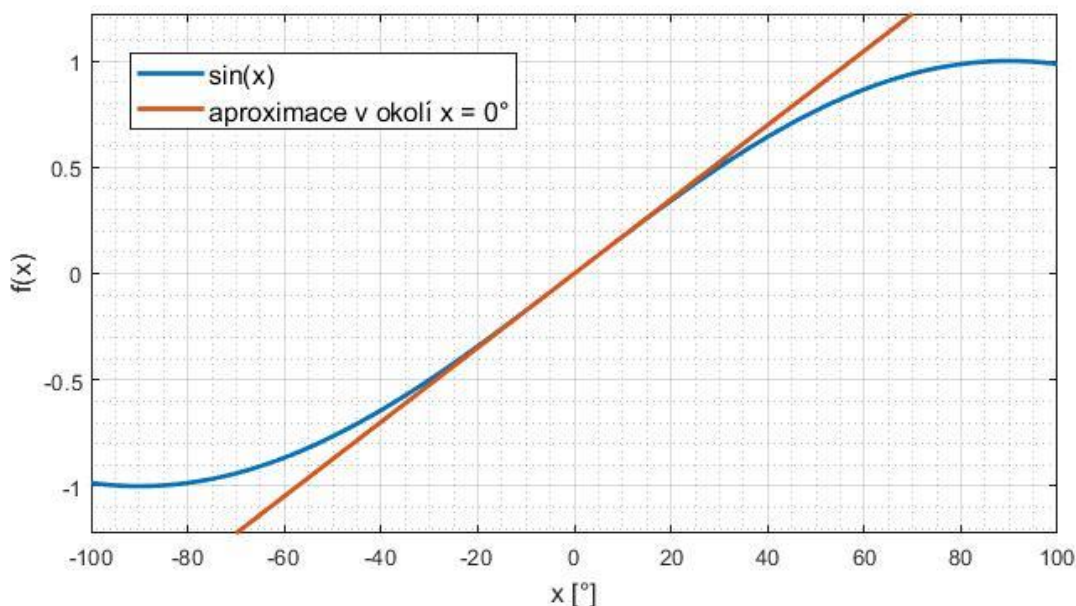
$$\Delta\dot{\boldsymbol{\theta}}(t) = \mathbf{A}\Delta\boldsymbol{\theta}(t) + \mathbf{B}\Delta u(t), \quad (3.31)$$

kde pod  $\Delta\dot{\boldsymbol{\theta}}$ ,  $\Delta\boldsymbol{\theta}$  a  $\Delta u$  rozumíme rozdíl aktuálních hodnot od jmenovitých (symbol  $\Delta$  se běžně vynechává). V čase neměnné matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  jsou nezávislé na stavech a vstupu. Pro inverzní polohu obou kyvadel je jmenovitý pracovní bod:

$$\boldsymbol{\theta}_n = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T \quad (3.32)$$

$$u_n = 0 \quad (3.33)$$

V případě funkcí jedné nebo dvou proměnných je možné toto lineární zjednodušení graficky prezentovat, viz obrázek 3-2. V situaci funkce více proměnných je představa vícedimenzionálního prostoru obtížnější, nicméně princip zůstává zachován.



3-2 – Aproximace nelineární funkce přímkou

## 3.2. Stabilizace

V této kapitole je pozornost věnována možnostem stabilizace dvojitého inverzního kyvadla. Existuje množství publikovaných článků s různými způsoby. Bohužel se však v naprosté většině případů jedná pouze o simulace, které nejsou experimentálně ověřeny na reálné soustavě. Například v [15] se za tímto účelem využívá prediktivního řízení. V [16] je představen RNA genetický algoritmus s fuzzy logikou. Zpráva [17] srovnává LQR, SDRE a použití NN. Sliding mode control s fuzzy NN se věnuje [18].

Podrobnějšího popisu dosáhly v této práci metody LQR, SDRE a SMC, které jsou již ověřené praxí. Taktéž FBL jakožto teoretický základ pro následující kapitulu Swing-up řešerše. Pokud se citované prameny rozcházejí ve značení jednotlivých veličin, byl vybrán jeden způsob a zbylé vzorce upraveny. Přestože je k metodám přistupováno vzhledem ke stabilizaci dvojitého inverzního kyvadla, mají široké využití, a proto jsou osvětleny na obecném stavovém vektoru  $\mathbf{x}$ .

### 3.2.1. Lineárně-kvadratický regulátor (LQR)

Cílem této metody je navrhnout optimální řízení lineárního systému vzhledem k velikosti akčního zásahu  $\mathbf{u}$  a odchylky stavů  $\mathbf{x}$  od nulové (žádané) hodnoty v čase. Prakticky je snaha minimalizovat nákladovou funkci  $J$ , která je dána:

$$J = \int_0^T (\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)) dt \quad (3.34)$$

pro zpětnovazební řídicí zákon (*state-feedback law*):

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (3.35)$$

Pro diskrétní systémy je integrál v rovnici ((3.34) nahrazen sumací. Matice  $\mathbf{Q}$  a  $\mathbf{R}$  odpovídají vahám stavů, resp. vstupů.  $\mathbf{K}$  je řídicí matice, kterou lze následně využít pro stabilizaci a je dána řešením přidružené Riccatiho rovnice. LQR je obecně rozšířená metoda a existuje k ní množství dokumentace.

### SDRE

Implementačně nejjednodušší modifikace LQR pro nelineární systémy je *State-Dependent Riccati Equation*. Principem metody je linearizace modelu okolo aktuálního stavu pro každý časový okamžik a následný výpočet optimální řídicí matice. Tento způsob tím pádem však klade větší nároky na výpočetní výkon.

### 3.2.2. Feedback linearizace (FBL)

Cílem této metody je algebraická transformace nelineárního systému na zcela, nebo alespoň zčásti lineární v čase neměnný (*LTI*) – tak, aby bylo možné využít lineárního způsobu řízení. Na rozdíl od běžné aproximace lineární funkcí tato metoda nezanedbává nelineární členy a funguje i mimo blízké okolí pracovního bodu. Existují dva principy – *input-state* a *input-output* linearizace.

Nutné algebraické operace nejsou obecně banální. Kvůli rozsahu se proto pro oba případy omezíme na systém s jedním vstupem a výstupem (*SISO*) popsany rovnicí:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

#### Input-state linearizace

Tento způsob spočívá v nalezení vhodné transformace stavů  $T$  a vstupu  $u$  tak, že platí:

$$\mathbf{z} = T(\mathbf{x}) \quad (3.37)$$

$$u = u(\mathbf{x}, v) \quad (3.38)$$

a úloha regulace se převádí na řízení systému:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}v \quad (3.39)$$

Podmínky linearizace, podrobný popis a příklady jsou vyčerpávajícím způsobem objasněny v [4] a [5].

## Input-output linearizace

Výstupy uvažovaného systému  $y$  jsou dány funkcí:

$$y = h(x) \quad (3.40)$$

Princip metody spočívá v nalezení přímé závislosti výstupů na vstupu, postupnou derivací funkce  $h(x)$  podle času, dokud se tato závislost neobjeví:

$$y^{(1)} = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} [f(x) + g(x)u] = L_f(h) + L_g(h)u \quad (3.41)$$

$$y^{(2)} = L_f^2(h) + L_g(L_f(h))u \quad (3.42)$$

A tak dále (detailněji v [6] a [7]), dokud pro  $k$ -tou derivaci je člen se vstupem nenulový. Předpis nového vstupu  $u$  je dán:

$$u = \frac{1}{L_g(L_f^{k-1}(h))} (-L_f^k(h) + v), \quad (3.43)$$

kde  $v$  je rovno  $y^{(k)}$ . Transformovaný systém předepsaný rovnicemi (3.44), (3.45) a (3.46) je již zcela lineární – lze ho tedy řídit lineární metodou (LQR, pole placement) dle (3.47). Je nutné ověřit stabilitu (viz [6]). Schéma uzavřené smyčky regulace je na obrázku 3-3.

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} y^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(k-1)} \\ y^{(k)} \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}v, \quad (3.44)$$

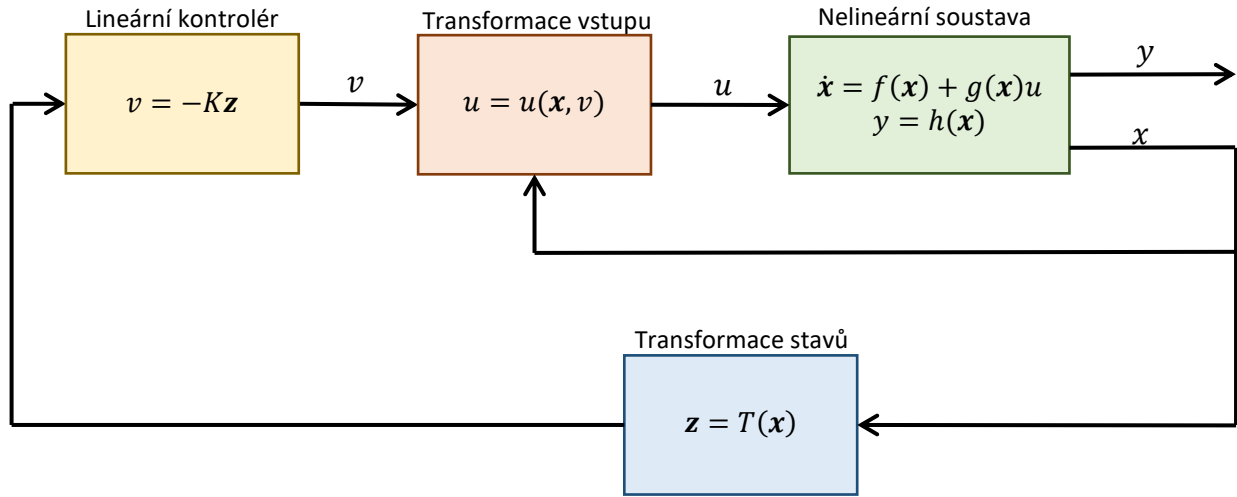
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$$v = -\mathbf{K}\mathbf{z} \quad (3.47)$$

Pro systémy s  $n$  vstupy a  $m$  výstupy (*MIMO*), kde  $n = m$ , je postup složitější (hovoří se tzv. *static input-output decoupling*), nicméně základní principy zůstávají totožné (srovnáno s [6] a [8]) a vedou na v čase neměnnou zpětnovazební regulaci.





3-3 – Blokové schéma regulace s input-output feedback linearizací

Systémy s rozdílným počtem vstupů a výstupů, jako je i dvojité inverzní kyvadlo, je nutné řídit dynamickým regulátorem, kde nové vstupy závisí na aktuálním stavu systému, ale i na předešlých vstupech. Postup takovéto linearizace se nazývá *dynamic input-output decoupling*. Praktický příklad lze nalézt ve zdroji [6] a je obecně vysvětlen například v článku [9].

Alternativou k výše uvedené dynamické linearizaci je částečná linearizace (*partial feedback linearization*) – rozdělení zobecněných souřadnic  $\mathbf{q}$  na regulované  $\mathbf{q}_r$ , jejichž rozměr je dán počtem vstupů, a  $\mathbf{q}_z$ , u kterých uvažujeme pouze nulovou dynamiku (*zero dynamics*, viz [6] a [10]).

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_r, \mathbf{q}_z]^T \quad (3.48)$$

Této cesty se využívá v [10] pro návrh funkce swing-up dvojitého inverzního kyvadla. Z tohoto důvodu se detailnější popis metody nachází v kapitole *Swing-up řešerše*.

### 3.2.3. Sliding mode control (SMC)

Je snaha o robustní způsob řízení nelineárního systému, jehož model není znám zcela přesně, ale počítá se s jistou maximální odchylkou od skutečnosti. Uvažuje se také přítomnost neznámého nelineárního rušení v čase. Princip spočívá v nalezení vhodné části stavového prostoru  $S(t)$  (tzv. *sliding surface*), kde systém vykazuje žádané chování, a řídicího zákona  $u(t)$ , jehož cílem je systém do vytyčené oblasti dovést a udržet ho v ní. Prakticky se hledá funkce  $\sigma(\mathbf{x}, t)$ , závislá na čase a odchylce stavů od žádané hodnoty  $\mathbf{x}_{\text{ref}}$ , pro kterou platí:

$$\sigma(\mathbf{x}, t) = 0, \text{ pokud } \mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{ref}} \quad (3.49)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d(\sigma^2(\mathbf{x}, t))}{dt} \leq -\gamma |\sigma(\mathbf{x}, t)|, \text{ pro } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_{\text{ref}}, \quad (3.50)$$

kde  $\gamma$  je libovolná kladná konstanta. Takto je zaručeno, že všechny trajektorie dokloužou v konečném čase (anglicky *slide*, odtud název metody) až k povrchu  $S(t)$  (srovnáno s [12]).

Podstatný rozdíl oproti výše diskutovaným metodám je, že zpětnovazební řídicí zákon není globálně spojitý. Je složený z více spojitých částí, mezi kterými je přepínáno podle aktuálního stavu systému tak, aby  $\sigma(\mathbf{x}, t)$  měla vždy opačné znaménko než  $\dot{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ . Prostými slovy – je-li systém odchýlen od povrchu  $S(t)$  na jednu stranu, musí se tato vzdálenost v čase zmenšovat.

V [13] je SMC využito pro stabilizaci reálného modelu dvojitého inverzního kyvadla. Mezi částmi řídicího zákona je zde přepínáno na základě  $\text{sign}(\sigma(\mathbf{x}, t))$ . Kapitola podává zajímavé grafické srovnání s metodou LQR.

Existuje velké množství úprav a vylepšení této metody (viz [14]).

### 3.3. Kálmánův filtr

Řízení reálného systému namísto simulovaného modelu je obecně mnohonásobně obtížnější. Za prvé z důvodu byť malé odlišnosti uvažovaného modelu oproti realitě (nepřesné odhadnutí parametrů, zanedbané vlivy, ...) a za druhé nedokonalosti měření (šum, nepřesnost senzorů, časové zpoždění, ...). Lineární regulace se zpětnovazebním řídicím zákonem  $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$  navíc vyžaduje v každém okamžiku znalost všech stavů systému, které však nelze vždy kompletně měřit.

Velmi užitečným nástrojem, který z nedokonalé znalosti modelu a nepřesného měření, získá nejlepší možný odhad všech stavů systému (a to i když ne všechny z nich jsou měřeny), je Kálmánův filtr. Jedná se o stochastického pozorovatele – předpokládá, že veličiny jsou náhodné s Gaussovým rozdělením a pracuje s jejich střední hodnotou a rozptylem (nejistotou). Ladění algoritmu spočívá ve vhodné volbě matic  $\mathbf{Q}$  a  $\mathbf{R}$ , kterými do výpočtu vstupuje kovariance procesního šumu a šumu měření.

Algoritmus sestává ze dvou částí:

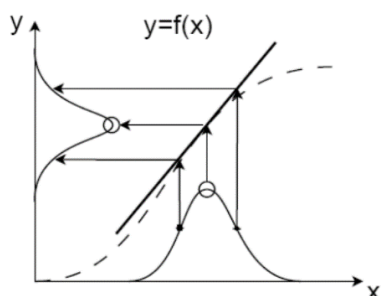
- predikce – výpočet nového stavu systému na základě znalosti lineárního (linearizovaného) modelu, aktuálního stavu a vstupu
- korekce – úprava predikovaného stavu na základě měření

V každé fázi je upraven odhad stavů a kovarianční matice  $\mathbf{P}$ , která nese informaci o nejistotě stavů a jejich vzájemné korelaci.

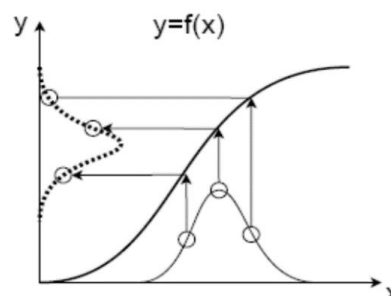
#### Nelineární Kálmánův filtr

Standartní verze Kálmánova filtru lze využít pouze pro lineární systémy, případně linearizované nicméně pouze v blízkém okolí pracovního bodu. Rozšířený (*extended Kalman filter*, EKF)

pracuje obecně s nelineárním modelem, který v každém okamžiku linearizuje kolem střední hodnoty (viz obrázek 3-4). Je nutné spočítat matici parciálních derivací rovnice modelu – Jakobián. Postup výpočtu se dále se standardní verzí neliší. Podstatným rozdílem je, že EKF poskytuje pouze aproximaci k optimálnímu nelineárnímu odhadu stavů. Alternativou je tzv. *Unscented Kalman filter* (UKF), který navíc aproximuje Gaussovo rozdělení vzhledem k více bodům (tzv. *sigma points*) kolem střední hodnoty (viz obrázek 3-5).



3-4 – Linearizace EKF okolo střední hodnoty (převzato z [11], upraveno)



3-5 – Sigma points UKF (převzato z [11], upraveno)

### 3.4. Swing-up řešerše

Pro plánování swing-upu je stěžejní nalezení vhodné trajektorie vozíku a kyvadel tak, aby po jeho ukončení byly polohy a rychlosti vozíku i kyvadel rovné nule. Swing-up na části navrhuje [22]. V [23] se využívá prediktivního řízení s nelineárním modelem. [24] představuje metodu řízení energie soustavy s částečnou linearizací.

Tato kapitole se dále zabývá řešením okrajového problému s volnými parametry, které se věnuje například [19] a [20]. Dále swing-upem na základě studia přirozeného pohybu s částečnou linearizací (viz [10]). Konečně také metodou, kterou navrhl Ing. Vít Slabý v [2].

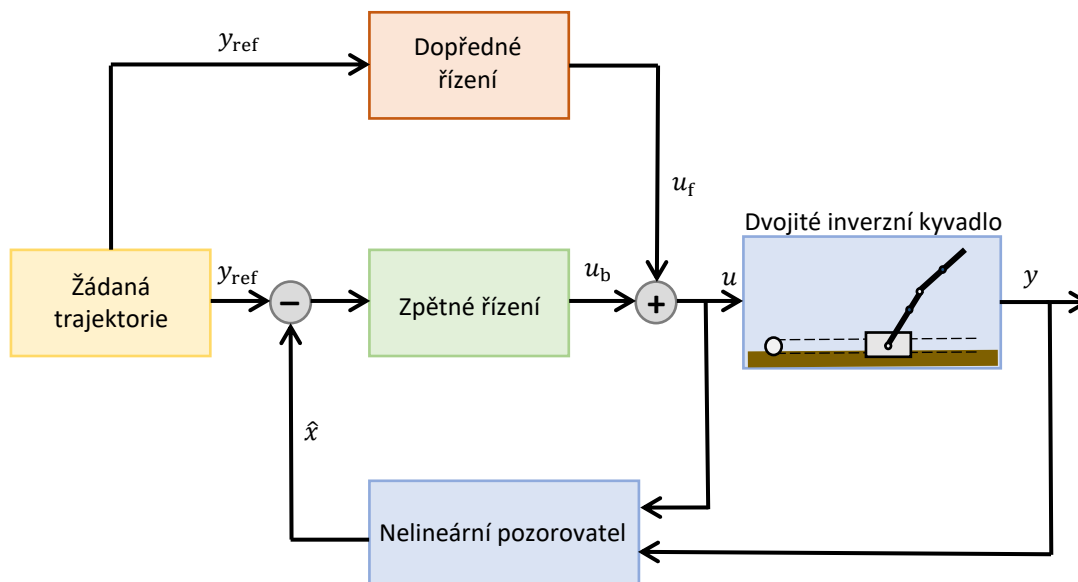
Ať už je ale způsob získání trajektorie výšvihu (resp. potřebného vstupu pro swing-up) jakýkoli, z hlediska struktury je možné dělit řízení na *dopředné* nebo *zpětné*.

#### Dopředné řízení (feedforward control)

Lze použít pouze v případě, že je chování dvojitého inverzního kyvadla velmi dobře známo. Na systém je aplikován dříve vypočítaný vstup a je očekáván určitý výstup. Jakékoli možné odchylky, např. vlivem vnějších vlivů nebo nepřesností simulačního modelu vůči reálnému systému, není možné kompenzovat. V [10] je vstupem přímo síla na vozík, v [19] a [20] (se třemi kyvadly) jeho zrychlení.

### Dopředné a zpětné řízení (feedforward & feedback control)

Dvojitě inverzní kyvadlo je však extrémně citlivé na počáteční podmínky. I malá odchylka od vypočítané trajektorie může zapříčinit neúspěšný swing-up. Možným řešením je přidání zpětného řízení. Pokud  $u_f$  označíme vstup daný dopředným a  $u_b$  zpětným řízením, potom výsledný je dán jejich součtem, viz obrázek 3-6.



3-6 – Blokové schéma dopředného a zpětného řízení pro swing-up (dle [19] a [20])

#### 3.4.1. Boundary value problem (BVP) s volnými parametry

Hledání trajektorie pro funkci swing-up je případ okrajového problému. Pohybová rovnice (3.2) představuje soustavu obyčejných diferenciálních rovnic (ODE) a okrajové podmínky jsou tyto:

$$\boldsymbol{\theta}_0(t = 0) = [0, \pi, \pi, 0, 0, 0]^T \quad (3.51)$$

$$\boldsymbol{\theta}_T(t = T) = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T, \quad (3.52)$$

kde  $t$  je čas a  $T$  délka trvání výšvihu. Pro šest rovnic a dvanáct podmínek je přidružený okrajový problém přeuročen. Aby jej bylo možné vyřešit, navrhuje [19] definovat trajektorii vozíku  $Y(t)$  kosinovou řadou (3.53) a přidat tím potřebné množství volných parametrů  $\mathbf{p} = [p_1, p_2, p_3, p_4]$  do pohybové rovnice. Alternativním předpisem pro trajektorii vozíku může být sinová řada [20], Fourierova řada [21], polynom a další.

$$Y(t, \mathbf{p}) = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) + \sum_{i=2}^5 p_{i-1} \cos\left(\frac{i\pi t}{T}\right) \quad (3.53)$$

Členy  $a_0 = -(p_1 + p_3)$  a  $a_1 = -(p_2 + p_4)$  jsou získány dosazením  $Y(0, \mathbf{p}) = Y(T, \mathbf{p}) = 0$ . Podmínky  $\dot{Y}(0, \mathbf{p}) = \dot{Y}(T, \mathbf{p}) = 0$  jsou vždy splněny díky vlastnostem funkce sinus, která se

objeví derivováním (3.53) podle času. Okrajový problém může být řešitelný vhodnou numerickou metodou.

### Feedforward

S definovanou trajektorií vozíku je jeho zrychlení dáno jako  $\ddot{\theta}_0(t) = \ddot{Y}(t, \mathbf{p})$ . Použitím regulátoru schopného dostatečně přesně řídit zrychlení vozíku bez velkého časového zpoždění, je možné zjednodušit pohybovou rovnici ve smyslu  $\ddot{\theta}_0(t) = u(t)$ , kde  $u$  je vstup do systému, řízený regulátorem. Přičemž v praxi, je namísto zrychlení vozíku, řízena jeho rychlost (PI regulátorem – viz [2] a [19]).

### Feedback

Pokud je odchylka aktuální hodnoty stavů od jmenovité trajektorie  $\boldsymbol{\theta}^*$  a vstupu  $u^*$  dostatečně malá, lze systém popsat lineární časově závislou stavovou rovnicí:

$$\Delta \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) = \mathbf{A}(t)\Delta \boldsymbol{\theta}(t) + \mathbf{B}(t)\Delta u(t), \quad (3.54)$$

kde matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  jsou dány linearizací rovnice (3.27) (viz kapitola *Linearizace*) podél jmenovité trajektorie a vstupu. A pro takovýto systém navrhnout v každém časovém okamžiku lineární regulátor:

$$\Delta u(t) = -\mathbf{K}(t)\Delta \boldsymbol{\theta}(t) = -\mathbf{K}(t)(\boldsymbol{\theta}(t) - \boldsymbol{\theta}^*(t)) \quad (3.55)$$

Na rozdíl od SDRE, je řídicí matice  $\mathbf{K}$  spočítána dopředu. Její výpočet tedy nezatěžuje procesor, na kterém běží program pro swing-up a následnou stabilizaci. Výsledný akční zásah dopředného a zpětného řízení je dán:

$$u(t) = u_a(t) + \mathbf{K}(t)(\boldsymbol{\theta}^*(t) - \boldsymbol{\theta}(t)) \quad (3.56)$$

### 3.4.2. Přirozený pohyb s částečnou linearizací

Studiem přirozeného pohybu systému (bez regulace) lze získat některé užitečné znalosti. V [10] takto navrhuji zjistit vlastní frekvence systému, za účelem výpočtu vhodné trajektorie výšvihu. Je zde vycházeno z poznatků kapitoly *Feedback linearizace (FBL)*.

### Částečná linearizace

Nejprve jsou zobecněné souřadnice dvojitého inverzního kyvadla (3.16) rozděleny na dvě části -  $\mathbf{q}_x$  je označena řízená část (vozík) a  $\mathbf{q}_\theta$  zbytek s nulovou dynamikou (kyvadla). S navrhovaným rozdělením je rovnice (3.15) rozepsána na (3.60) a (3.61) a matice  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{K}$ :

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{xx}(1,1) & \mathbf{M}_{x\theta}(1,2) \\ \mathbf{M}_{\theta x}(2,1) & \mathbf{M}_{\theta\theta}(2,2) \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{xx}(1,1) & \mathbf{B}_{x\theta}(1,2) \\ \mathbf{0}(2,1) & \mathbf{B}_{\theta\theta}(2,2) \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{K}_{\theta}(2,1) \end{bmatrix}, \quad (3.59)$$

kde  $\mathbf{0}$  představuje nulový vektor a čísla v závorkách udávají rozměr matice, takže například  $\mathbf{M}_{x\theta} = [d_2 \cos \theta_1 \quad d_3 \cos \theta_2]$ .

$$\mathbf{M}_{xx}\ddot{\mathbf{q}}_x + \mathbf{M}_{x\theta}\ddot{\mathbf{q}}_{\theta} + \mathbf{B}_{xx}\dot{\mathbf{q}}_x + \mathbf{B}_{x\theta}\dot{\mathbf{q}}_{\theta} = u \quad (3.60)$$

$$\mathbf{M}_{\theta x}\ddot{\mathbf{q}}_x + \mathbf{M}_{\theta\theta}\ddot{\mathbf{q}}_{\theta} + \mathbf{B}_{\theta\theta}\dot{\mathbf{q}}_{\theta} + \mathbf{K}_{\theta} = \mathbf{0} \quad (3.61)$$

Z rovnice (3.61) je vyjádřeno  $\ddot{\mathbf{q}}_{\theta}$  a dosazeno do (3.60). Je-li výstup systému  $\mathbf{y} = \mathbf{q}_x$ , potom feedback linearizace získané rovnice dává:

$$\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{q}}_x = \mathbf{v} \quad (3.62)$$

$$u = \mathbf{B}_{xx}\dot{\mathbf{q}}_x + (\mathbf{B}_{x\theta} + \mathbf{W}\mathbf{B}_{\theta\theta})\dot{\mathbf{q}}_{\theta} + \mathbf{W}\mathbf{K}_{\theta} + (\mathbf{W}\mathbf{M}_{\theta x} + \mathbf{M}_{xx})\mathbf{v}, \quad (3.63)$$

kde pro zjednodušení zápisu  $\mathbf{W} = -\mathbf{M}_{x\theta}\mathbf{M}_{\theta\theta}^{-1}$ .

### Vlastní frekvence a feedforward

Princip dále spočívá v nalezení takového vstupu  $\mathbf{v}$ , pro který platí okrajové podmínky (3.51) a (3.52). Obecně je dána součtem dvou částí. První přiměje vozík v čase  $T$  popojet do určité vzdálenosti od počátečního stavu. Nicméně vzhledem k tomu, že koncová poloha vozíku má být totožná s počáteční, tedy  $\theta_0(0) = \theta_0(T) = 0$ , bude zmíněná složka pro tento případ nulová. Druhá část nemění finální pozici vozíku, ale díky provázanosti přes nulovou dynamiku, způsobí výšvih kyvadel. [10] ji navrhuje ve tvaru:

$$\mathbf{v} = \sum_i A_i \sin(2\pi f_i t + \varphi_i) \quad (3.64)$$

Amplitudy  $A_i$  jsou v poměru ke změně potenciální energie soustavy:

$$\Delta E_p = m_1 l_1 g + m_2 (L_1 + l_2) g \quad (3.65)$$

nicméně přesná čísla, stejně jako pro fázové posuvy  $\varphi_i$ , jsou výsledkem optimalizačního procesu tak, aby bylo dostáno okrajovým podmínkám i pro souřadnice  $\mathbf{q}_{\theta}$ .

Pokud existují přirozená čísla  $K_i$ , tak aby platilo:

$$2\pi f_i T = 2\pi K_i \quad (3.66)$$

je integrace i dvojnásobná integrace (3.64) do času  $T$  rovna nule, čímž zaručuje nulovou rychlost vozíku a jeho posunutí na konci výšvihu. V praxi je (3.66) splněna pouze přibližně, což ale nevadí, jelikož je řízení blízko inverzní polohy přepnuto na stabilizaci.

Zbývá poznamenat, že vlastní frekvence  $f_i$  systému jsou získány volným pádem kyvadel z pozic blízko inverzní polohy. Na takto získané časové závislosti je aplikovaná Fourierova transformace a vybrány slibná maxima (viz [10]).

Výsledný vstup do systému je dán dosazením do (3.64) a následnou úpravou dle (3.63) podle aktuálních stavů.

### 3.4.3. Metoda Víta Slabého

Ing. Vít Slabý pro řešení okrajového problému daného soustavou ODE (3.2) a okrajovými podmínkami (3.51) a (3.52) naprogramoval vlastní optimalizační algoritmus (viz [2]). Cílem programu je nalézt vhodné parametry  $\mathbf{p}$  funkce (3.53) minimalizací hodnotící funkce (3.67). Tou je rozdíl kinetické ( $T$ ) a potenciální ( $V$ ) energie v inverzní poloze. Jedná se tedy o Lagrangián ( $L$ ).

Konstanta  $E_p$  upravuje vliv potenciální energie – v prvních fázích optimalizace je snaha především o nízké rychlosti kyvadel v blízkosti inverzní polohy. Větší důraz je tedy kladen na energii kinetickou za cenu malých odchylek kyvadel od přesné inverzní polohy. Dalším postupem optimalizačního procesu se již dodržení polohy přikládá větší význam.

$$L = T - e_p V \quad (3.67)$$

#### Princip algoritmu – jedna iterace

- Provedení přibližně 50 až 100 simulací výšvihu s náhodnými parametry – ty jsou vybírány ze čtyřdimenzionálního prostoru okolo nejslibnější sady parametrů z minulé iterace.
- Výběr nejvhodnějšího vektoru  $\mathbf{p}$ , aktualizace  $e_p$ .
- Je-li předem provedeno dostatečné množství iterací pro určení směru postupu v prostoru parametrů, je k vektoru  $\mathbf{p}$  z předchozího kroku přičten náhodný násobek zjištěného trendu. Toto vede k výraznému zrychlení konvergence metody. „*Nejdříve je vhodné volit velkou setrvačnost, v těsné blízkosti ideálního stavu je pak lepší ji snížit*“ (citováno z [2]).

Takto lze dle práce Ing. Slabého nalézt vhodné parametry, resp. trajektorii pro swing-up v časovém intervalu několika jednotek až desítek minut (srovnáno s [2]) s téměř nulovou konečnou odchylkou natočení kyvadel vůči inverzním polohám.

## 3.5. Stávající model kyvadla a převzaté prvky

Poslední úpravy na kyvadle před touto prací byly provedeny v roce 2018 Ing. Vítem Slabým – detailní popis komponent a výsledků je dostupný pod odkazem [2]. Části, které fungovaly dobře,

byly ponechány. Naopak výměny dosáhly mechanické a elektronické prvky, které byly možným zdrojem problémů nebo jejichž úprava slibovala kvalitnější řízení. Princip řízení – kartou MF624 s využitím *Simulink Desktop Real-Time* – zůstal beze změny. Blokové schéma zapojení stávajících i nových elektronických komponent je k nahlédnutí v kapitole *Úprava elektroniky* na obrázku 4-5.

### Konstrukce

Zachován byl hlavní nosný prvek – ocelový rám ležící na čtyřech gumových nožkách, které lze ve vertikálním směru polohovat. Dále lineární vedení (ALUROL 1,6 m) s vozíkem a rolnami. Naopak zcela změněn byl způsob přenosu hybného momentu motoru na vozík, který byl u stávajícího modelu realizován ozubeným hřebem.



3-7 – Ocelový rám konstrukce

### Motor

Součástí modelu je DC motor Transmotec PD4266-24-4. Je napájený jmenovitým napětím 24 V a má vestavěnou Planetovu převodovku s převodovým poměrem čtyři ku jedné. Další důležité parametry motoru jsou uvedeny v tabulce 3-1 – Tabulka případně pod odkazem [3]. Je důležité poznamenat, že moment stejnosměrného motoru na výstupní hřídeli je přímo úměrný proudu kotvou  $i_a$ :

$$\mu = k c_\phi i_a, \quad (3.68)$$

kde  $c_\phi$  je konstanta daná vlastnostmi motoru a  $k$  převodový poměr (v tomto případě  $k = 4$ ).

### Zdroj napětí

Znovu využit byl spínaný zdroj MEAN WELL RS-150-24 převádějící napětí ze sítě na stejnosměrné 24 V.



### Indukční snímače

Dvě koncová čidla LANBAO LR08BF02DPOY-E1 se závitem M8 indikují nebezpečí vyjetí vozíku z kolejnice lineárního vedení s maximálním dosahem 2 mm. Podle [2] vyžadují napájení 10 až 30 V. Za tímto účelem byl využit 12 V výstup karty MF624.

### Enkodér motoru

Inkrementální enkodér se dvěma Hallovými sondami je již vestavěný v motoru. Při kvadrurním režimu disponuje 38 pulzy na sondu a otáčku. S daným převodovým poměrem je hodnota CPR (počet tiků na otočení hřídele – *counts per revolution*):

$$CPR = 38 \cdot 2 \cdot 4 = 304 \quad (3.69)$$

To pak definuje nejmenší rozpoznatelné natočení hřídele motoru  $\alpha_0$  a posun vozíku  $p_0$ :

$$\alpha_0 = \frac{2\pi}{CPR} \doteq 0,021 \text{ rad} \doteq 1,18^\circ \quad (3.70)$$

$$p_0 = \alpha_0 R_0 = 0,38 \text{ mm} \quad (3.71)$$

V předchozích úpravách byly přidány i pull-up rezistory k oběma sondám snímače.

### Enkodéry kyvadel

Natočení kyvadel je měřeno inkrementálními optickými enkodéry z rodiny Broadcom/Avago HEDL-5540. Při kvadrurním snímání je jejich rozlišení 2048 CPR. Nejmenší rozpoznatelné natočení prvního, resp. druhého kyvadla  $\alpha_1, \alpha_2$  je tedy:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{2\pi}{CPR} = 0,031 \text{ rad} = 0,18^\circ \quad (3.72)$$

### Úspěšnost

Ing. Vítu Slabému se podařilo realizovat robustní stabilizaci, která je „klidná a dlouhodobá“ (citováno z [2]). Swing-up je úspěšný asi z třiceti procent (srovnáno tamtéž).

Pouze motor		Motor s převodovkou	
Jmenovitý moment	<b>0,056 Nm</b>	Jmenovitý moment	<b>0,177 Nm</b>
Jmenovitá rychlost	<b>5900 ot./min</b>	Jmenovitá rychlost	<b>1445 ot./min</b>
Jmenovitý proud	<b><math>\leq 2,1\text{ A}</math></b>		
Otáčky na prázdno	<b>7000 ot./min</b>		
Záběrný moment	<b>0,422 Nm</b>		
Startovní proud	<b>13 A</b>		
Konstanta $c_\phi$	<b>0,0324 Vs</b>		

3-1 – Tabulka parametrů DC motoru (srovnáno s [2][3])

## 4 Praktická část

Následuje stěžejní část, jejímž cílem je popsat odvedenou práci na reálné soustavě dvojitěho inverzního kyvadla a zhodnotit její výsledky. Pro snadnou orientaci jsou v následujícím odstavci znovu přehledně uvedeny cíle praktické části:

### Shrnutí cílů experimentu

Praktické požadavky na tuto diplomovou práci jsou přestavět stávající model a implementovat řízení pro jeho swing-up z dolní rovnovážné polohy do inverzní a následnou stabilizaci. Přičemž má být:

- Zachována co nejnížší cena konečného modelu.
- Navrhnutá řídicí elektronika a pro výkonovou část použít dostupný hardware laboratoře.
- Realizováno LQG řízení srovnatelné nebo lepší kvality než u stávajícího modelu.
- Implementována funkce robustního a opakovatelného swing-upu.

### 4.1. Úprava mechaniky

Zatímco ocelový rám a lineární vedení s vozíkem byly převzaty takřka beze změny, způsob přenosu hybného momentu motoru na vozík byl, spolu se všemi dalšími potřebnými mechanickými komponentami, zcela změněn. Uložení stávajícího ozubeného hřebenu (popis s obrázkovou dokumentací k nahlédnutí v [2]) bylo shledáno nedostatečně rigidním na rozdíl od tvrzení v závěru zmiňované práce. Na některých místech se hřeben pod nevelkou silou prohýbal, což jistě kvalitě řízení nepřispívalo.

Další nevýhodou byla velká (redukováná) hmotnost vozíku, dle [2] odhadnutá na 1499 g. Ta má za následek větší časovou mechanickou konstantu pohybu vozíku a nutnost větších sil pro jeho rychlou akceleraci. Přičemž podstatnou měrou se na hmotnosti vozíku podílel sám motor.

Bylo rozhodnuto o využití ozubeného řemenu namísto hřebenu s výše uvedenými nedostatky. Díky přemístění motoru a jeho připevnění k nepohyblivé části modelu, je možné snížit hmotnost vozíku (očekáváno dvacet procent) a vylepšit tím dynamické vlastnosti systému.

V programu Inventor (Autodesk) byl vytvořen návrh (viz obrázek 4-1) takového pohonu včetně kompletního řešení uchycení všech jednotlivých částí a mechanismu pro napnutí řemene. Následně byly zakoupeny potřebné součásti a model sestaven.



4-1 – Návrh nového mechanismu ozubeného řemene (Inventor)

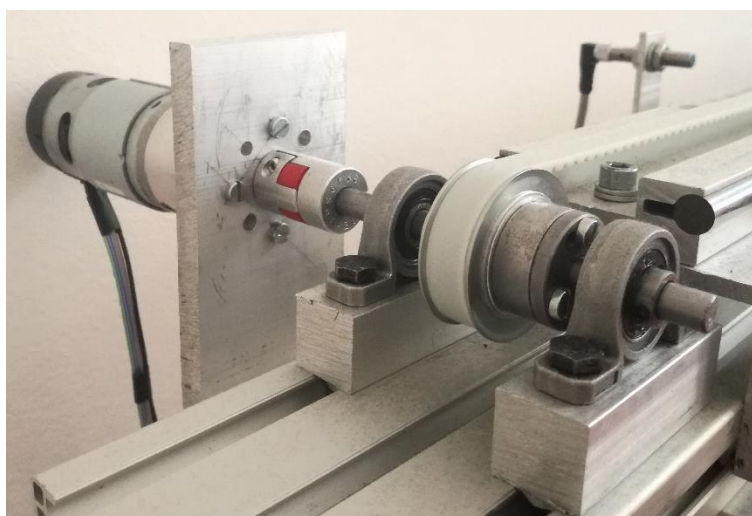
### Konstrukce

Nedostatečná tuhost stávajícího modelu byla z velké části odstraněna přidáním hliníkového profilu (*Rexroth 30x90*) o délce 1,8 metru. Ten je připevněn k ocelovému rámu a plní funkci kotvícího prvku pro všechny ostatní komponenty.

Vzájemnou pozici jednotlivých částí mechanismu zaručují součásti vyrobené z hliníkových polotovarů (plechy, tyče, profily U a L) a 3D tiskem.

### Mechanismus ozubeného řemenu

Byl zakoupen ozubený řemen AT5 firmy Matis o šířce 10 mm a dvě kompatibilní řemenice průměru 37 mm. Ty k hřídelkám drží svěrnými pouzdry dostupnými v Mechatronické laboratoři. Hřídele jsou uloženy v ložiskových domcích KP08. Moment motoru je na soustavu ozubeného řemenu přenášen bezvúlovou spojkou. Popisovaná část modelu je vyfotografována na obr. 4-2.



4-2 – Přenos hybného momentu na hřídel a ozubený řemen

K zamezení pohybu hřídele ve směru její osy slouží stavěcí šrouby ložiskového domku.

### **Bezpečnostní opatření proti vyjetí vozíku**

Z důvodu nutného prostoru pro řemen po celé délce lineárního vedení nebylo možné ponechat stávající uložení koncových čidel. Namísto toho byly indukční snímače přesunuty do horizontální polohy a uchycené hliníkovým profilem tvaru L. Mezi zadní stranou projíždějícího vozíku a hrotem snímače je mezera asi jeden milimetr, kvůli omezenému rozsahu senzoru.

Nicméně v některých případech má vozík při krizové situaci natolik velkou rychlost, že by i přes softwarová opatření z kolejnice mohl vyjet. Z tohoto důvodu je lineární vedení připevněno k nosné konstrukci šroubem s vysokou hlavou s podložkami, který tak plní funkci mechanické ochrany proti vyjetí vozíku. Na obrázku 4-3 je fotografií zachycen kraj lineárního vedení s popsány ochranami.



*4-3 – Koncový snímač a mechanická zábrana proti vyjetí vozíku*

### **Vedení kabelů enkodérů**

Jedním ze zdrojů nepřesností modelu může být kabeláž, jejíž vliv se obtížně odhaduje a bohužel nelze zcela odstranit. V případě dvojitého inverzního kyvadla je problematickým signálové spojení mezi sběrnici a enkodéry kyvadel. Především druhého z nich, neboť oproti prvnímu navíc rotuje vůči vozíku. To vede (v případě konstantního směru otáčení) k postupnému namotávání signálového kabelu na hřídel prvního kyvadla. A rameni je tak následný pohyb znesnadněn, nebo zcela znemožněn.

V podstatě existují dvě varianty řešení problému – použití sběrných kroužků, nebo o něco delšího a měkčího kabelu. Sběrné kroužky rotaci nijak nelimitují a jejich vliv jde do jisté odhadnout v podobě suchého tření. Nicméně jsou drahé.

S levnější variantou, kterou využil ve své diplomové práci [2] i Ing. Slabý je zkušenost dostatečně dobrá a v zadání práce je kladen důraz na ekonomické řešení. S nahlédnutím k této skutečnosti byl použit nejměkčí dostupný plochý kabel se čtyřmi žílami.

Translační pohyb obou enkodérů je z hlediska kabeláže umožněn volným prověšením mezi enkodéry a přibližně středem hliníkového profilu.

### **Napínání řemene**

Na pravé straně hliníkového profilu leží ložiskové domky na hranolu s vnitřním závitem. Napínání řemene je realizováno dlouhým šroubem na obrázku 4-4 vpravo. Po nastavení požadovaného pnutí je hranol s domky aretován přímo k profilu čtyřmi šrouby.

Bylo také potřeba zabránit možnému zadrhávání zubů řemene o šrouby mezi lineárním vedením a hliníkovými U profily. Zatímco po stranách je toto znemožněno blízkostí řemenice, ve středu bylo třeba přidat napínací ložisko (viz obrázek 4-4 vlevo). To je ve své poloze drženo součástmi vyrobenými 3D tiskem.



*4-4 – Systém pro napnutí řemene*

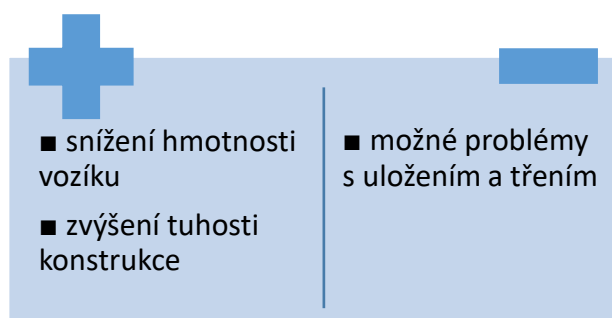
### 3D tisk

Z důvodu opotřebovanosti plastových součástí stávajícího kyvadla, byly všechny znovu vymodelované v SolidWorks a vytisknuté na školních tiskárnách. Některé drobné neduhy (například jemné vyklání nebo protáčení) byly odstraněny, nicméně veskrze žádné zásadní změny provedeny nebyly. Mezi popsané součásti patří domky ložisek pro hřídelky a držáky enkodérů respektive kyvadel.

### Výhody a nevýhody nového řešení

Úpravou mechaniky kyvadla bylo dosaženo snížení hmotnosti vozíku a celkového zpevnění celé konstrukce. Použitý ozubený řemen je dostatečně tuhý vzhledem k působícím silám, nedochází tedy k zásadní změně jeho délky.

Po sestavení modelu však byly zjištěny významné rozdíly tření po délce lineárního vedení, které znesnadňovaly řízení. Následným rozebráním a opětovnou kompletací byla identifikována příčina problému. Uložení mechanismu ozubeného řemene na hliníkových součástech totiž umožňuje malé odchylky od potřebných kolmostí, souosostí atd. Bohužel je mechanika kyvadla právě na tyto nedostatky extrémně citlivá. Po několika pokusech bylo nicméně dosaženo dostatečné přesnosti tak, že je suché tření po délce lineárního vedení víceméně konstantní.

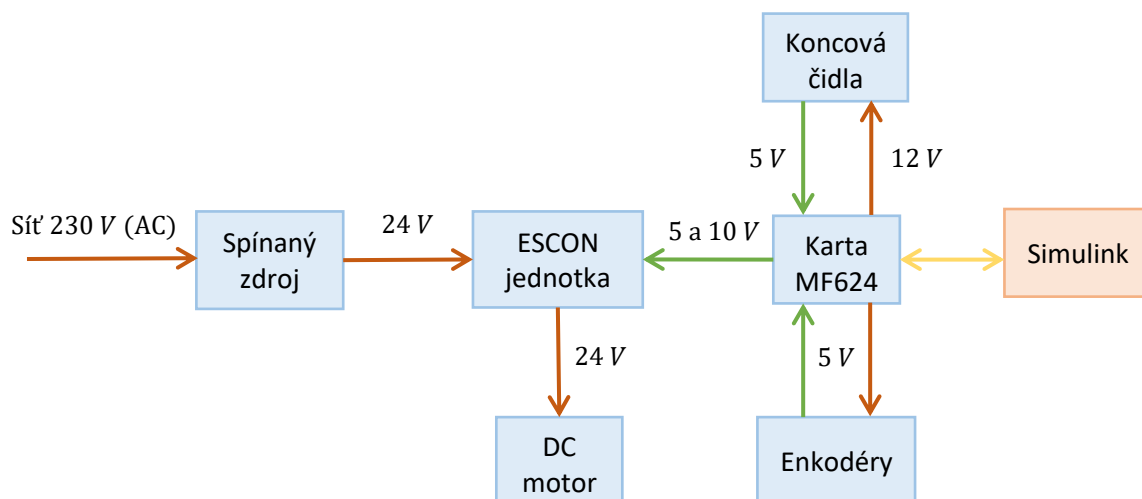


## 4.2. Úprava elektroniky

Dosti nepřehledná, i když fungující, stávající elektronika byla nahrazena komerčním produktem dostupným v Mechatronické laboratoři – výkonovou jednotkou ESCON 70/10 od společnosti Maxon. Kromě jejího správného nastavení bylo třeba zrealizovat zapojení indukčních snímačů.

### Celkové zapojení

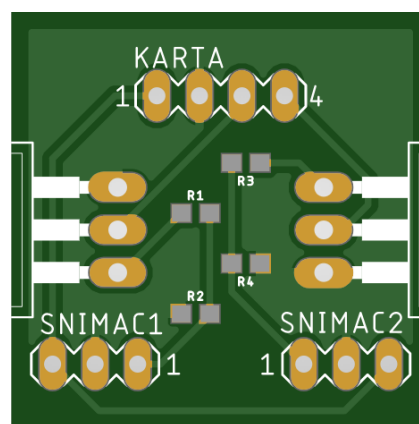
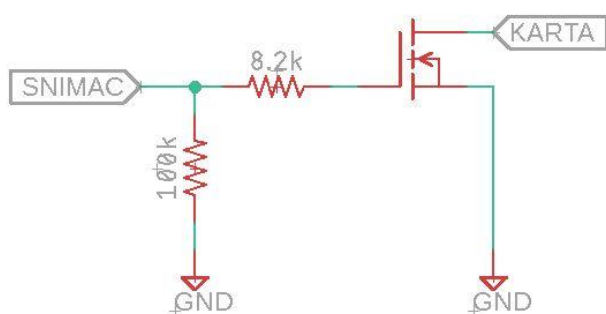
Blokové schéma 4-5 představuje zapojení všech periférií. Červeně jsou značeny napájecí cesty a zeleně signálová spojení. Směr šipek udává vztah poskytovatel-příjemce.



4-5 – Napájecí (červené) a signálové (zelené) cesty

### Indukční snímače

Koncová čidla vyžadují napájení deseti až třiceti volty, zatímco napěťová hladina karty je určena TTL. Dle schématického zapojení na obrázku 4-6 (vlevo) byla v programu EAGLE od společnosti Autodesk navržena jednoduchá deska plošných spojů. Tranzistor MOSFET, spolu s pull-up rezistorem na 5 voltů, převádí signál snímače na napěťovou hladinu karty.



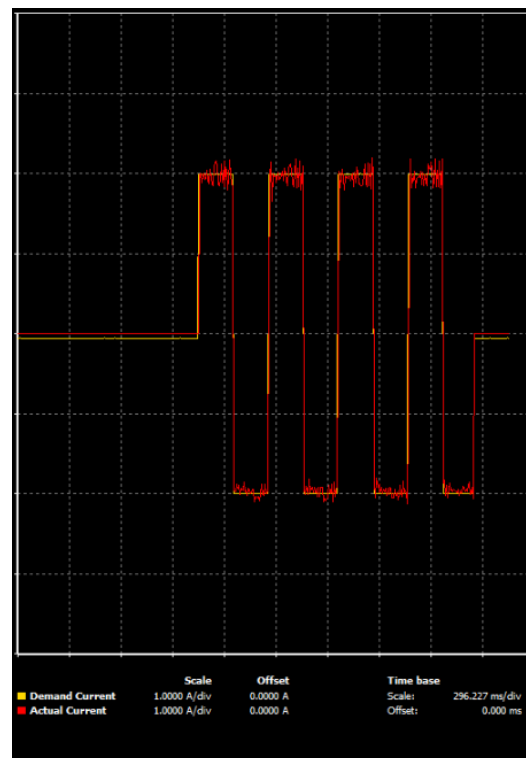
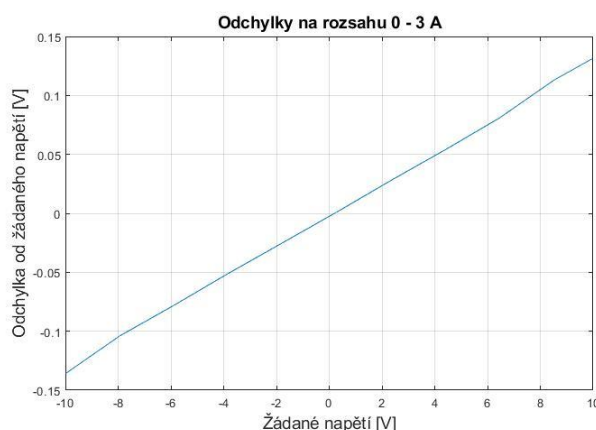
4-6 – schématické zapojení výstupu indukčního snímače (vlevo); DPS (vpravo)

### Jednotka ESCON

Nastavení výkonové jednotky bylo provedeno v programu výrobce a nahráno do zařízení. Informace o žádané velikosti proudu (resp. momentu motoru) je přenášena analogově, napětím na výstupech karty MF624.



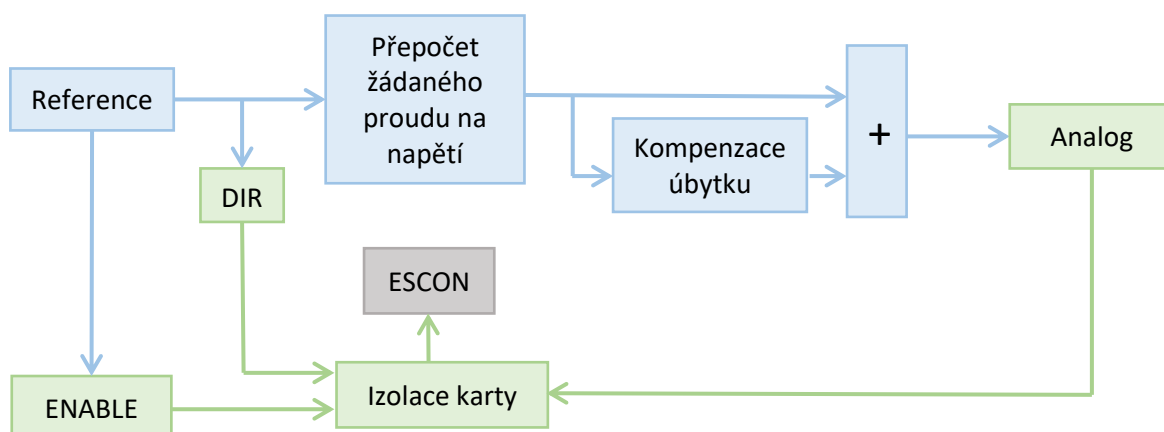
Během ověřování správnosti nastavení výkonové jednotky byl detekován rozdíl mezi žádanou velikostí proudu na PC a výkonové jednotce v řádu desetin ampéru. To z důvodu úbytku napětí po cestě, především na izolaci karty MF624. Pro různá napětí karty byl tento úbytek změřen a několika body proložena přímka (viz obrázek 4-7, vlevo). Se znalostí její směrnice byla navržena kompenzace úbytku podle obrázku 4-8, kde modrá barva odpovídá Simulinku a zelená kartě MF624. Po tomto vylepšení se hodnoty rozcházejí nejvýše v řádu několika miliampérů, což je zanedbatelné vzhledem k nastavenému rozsahu (7,5 A).



4-7 – Ověření nastavení výkonové jednotky ESCON

Na grafu 4-7 vpravo, je zobrazen časový průběh proudu motorem. Je důležité poznamenat, že žádaná hodnota proudu v Simulinku je přepínána mezi dvěma, resp. mínus dvěma ampéry, vždy po 0,22 sekundy. Interpretace grafu je následující:

Před spuštěním programu v Simulinku je aktuální proud motorem (červená) nulový, jelikož je ENABLE v logické nule. Žádaná hodnota (žlutá) se k nule pouze blíží, protože kompenzace úbytku ještě není aktivní. Po zapnutí programu se až do jeho ukončení žádaná hodnota relativně přesně drží 2 A, respektive -2 A. A aktuální hodnota proudu bez zásadní odchylky, překmitů a zpoždění kopíruje žádanou. Výkonovou jednotku se tedy podařilo správně nastavit.



4-8 – Kompensace úbytku; Signály analog, ENABLE a DIR

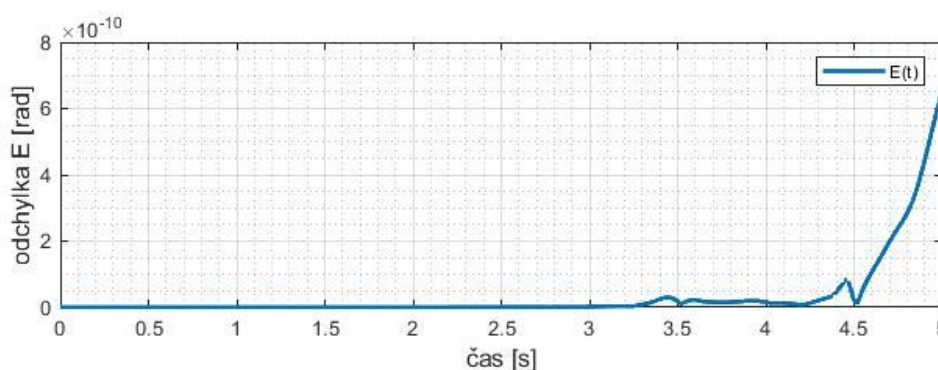
### 4.3. Simulace systému

Aby se co nejvíce zabránilo chybám uživatele, po odvození rovnice (3.15), se veškeré další modifikace prováděly prostřednictvím Symbolic Math Toolbox v programu MATLAB. Takto byla získána pohybová rovnice (3.27) i její zlinearizovaný tvar v podobě state-space matic  $A$  a  $B$ . Jedná se o složité vztahy se značným množstvím členů. Simulace systému dále probíhala v prostředí Simulink s řešičem ode4 (Runge-Kutta) s konstantním časovým krokem 0.001 s.

#### 4.3.1. Ověření rovnic

Ačkoli byly rovnice (3.15) srovnány s dalšími dostupnými prameny ([2], [17], ...) a úpravy prováděny pomocí automatických funkcí, pro jistotu bylo realizováno ověření pomocí Simscape modelu. K tomu byl použit soubor z [2], který byl pro účely této práce upraven, viz 4-11.

Vlivem numerických nepřesností se časem akumuluje jistá nepatrná odchylka (viz obrázek 4-9), ale ta nemá význam vzhledem k použití Kálmánova filtru (nebo obecně pozorovatele).



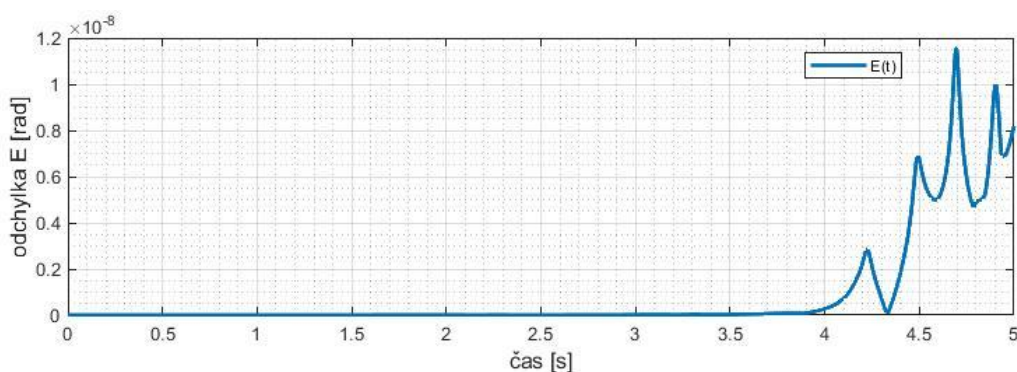
4-9 – Odchylka mezi stavy modelu Simscape a pohybové rovnice

Funkce  $E(t)$  je počítaná podle (4.1), kde horní indexy značí, zdali se jedná o stavy modelu Simscape, nebo o výstupy pohybové rovnice (3.27):

$$E(t) = |\theta_1^{\text{funkce}} - \theta_1^{\text{simscape}}| + |\theta_2^{\text{funkce}} - \theta_2^{\text{simscape}}| \quad (4.1)$$

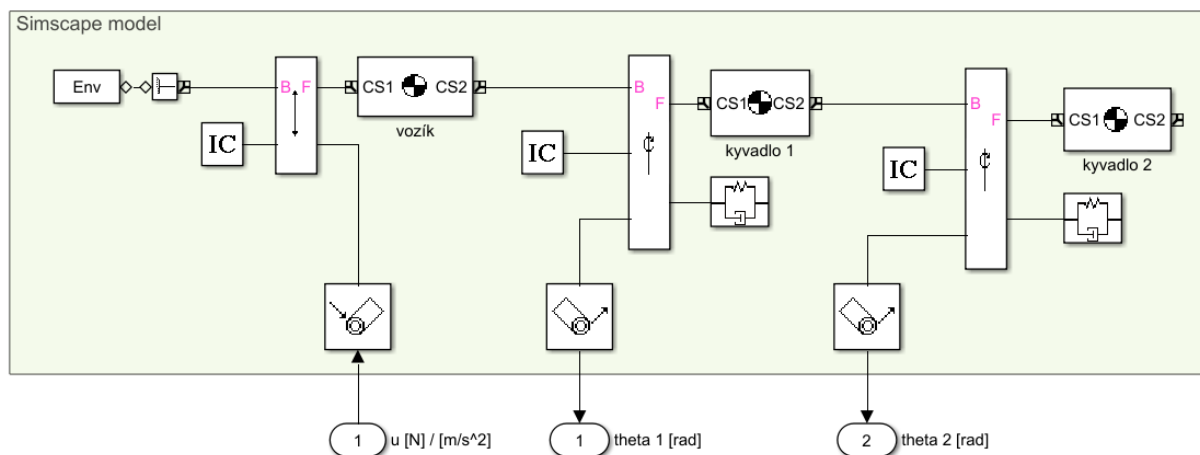
### Zjednodušené rovnice pro BVP

Jak už bylo uvedeno v teoretické části této práce, pro získání trajektorií swing-upu dvojitého kyvadla se uvažuje zjednodušený model. Vstupem do soustavy je přímo zrychlení vozíku. Zjednodušení lze nejnadhěji dosáhnout, dosadí-li se do (3.17) a (3.18) v prvním řádku samé nuly, vyjma prvního členu matice  $M$ , který bude roven jedné. Následně je zjednodušená pohybová rovnice ve tvaru (3.2) získána zcela totožně jako základní. Je zajímavé, že při validaci zjednodušeného modelu vychází odchylka vůči modelu Simscape o dva řády větší než v předchozím případě. Každopádně stále platí za zanedbatelnou.



4-10 – Odchylka mezi stavy modelu Simscape a zjednodušené pohybové rovnice

Ověření pohybové rovnice (3.27) dopadlo úspěšně. Věrně popisuje uvažovaný model. To je jedním ze základních předpokladů pro návrh úspěšného řídicího algoritmu.



4-11 – Referenční model v Simscape

## 4.4. Odhad parametrů soustavy

Za předpokladu dosazení správných parametrů do odpovídajícího modelu je možné v jistém časovém horizontu predikovat chování reálné soustavy. Seznam konstant, které je nutné definovat pro dvojité kyvadlo na vozíku, je poměrně dlouhý. Většinu z nich však bylo možné přímo změřit, nebo alespoň přibližně vypočítat. Vliv kabelů lze těžko zjistit, jako základní odhady byly vzaty jejich celkové hmotnosti a připočítány ke hmotnostem odpovídajících částí, které byly změřeny na stolní váze.

$m_0$  Do (redukované) hmotnosti vozíku jsou kromě něj započítány také části, které jsou s jeho pohybem spjaty – ozubený řemen, řemenice, svěrná pouzdra, hřídele a prověšený kabel enkodéru.

Momenty setrvačnosti částí vykonávajících rotační pohyb však nelze jednoduše změřit. Byly tedy zhruba odhadnuty výpočtem momentů setrvačnosti základních těles (rotujících válců) nahrazujících komplikovanější tvary.

$m_1, m_2$  Hmotnosti kyvadel jsou tvořeny ocelovou tyčí a plastovými držáky. U prvního z nich navíc enkodérem a jeho kabelem.

$l_1, l_2$  Polohy těžišť kyvadel byly zjištěny experimentálně. Kyvadlo bylo zavěšeno na tenký drátek. Jeho posouváním po délce kyvadla bylo docíleno stabilní polohy. V tomto okamžiku se drátek nachází v těžišti. Jeho poloha byla zaznačena a změřena pravítkem.

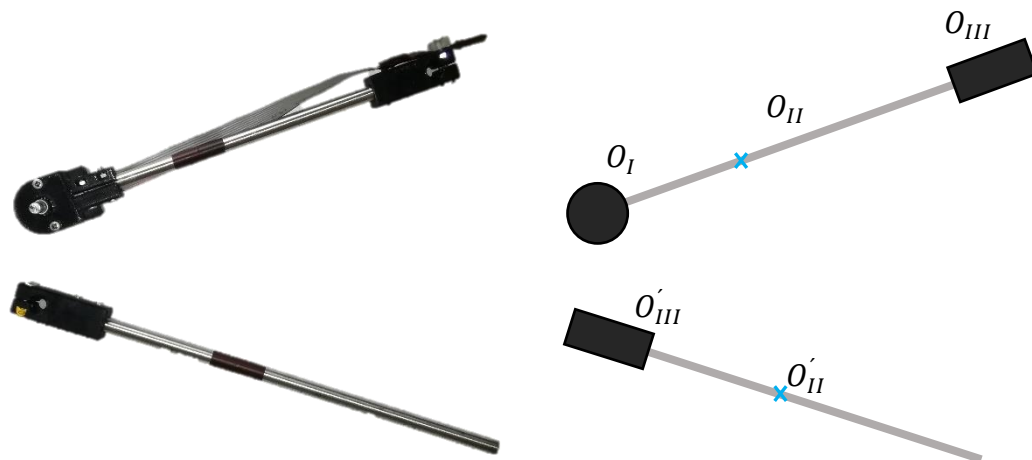
$L_1$  Vzdálenost mezi rotačními vazbami prvního a druhého kyvadla byla změřena pravítkem. Jiné vzdálenosti nejsou do modelu potřeba, byly ovšem zjištěny stejným způsobem pro přibližný výpočet momentů setrvačnosti.

$I_1, I_2$  Počáteční odhady momentů setrvačností kyvadel byly, podobně jako u vozíku, vypočítány se zjednodušením na základní geometrické objekty, viz obrázek 4-12, jako:

$$I_1 = I_{O_I} + I_{O_{II}} + I_{O_{III}} \quad (4.2)$$

$$I_2 = I'_{O_{II}} + I'_{O_{III}} \quad (4.3)$$

Jednotlivé sčítance v (4.2) a (4.3) jsou momenty setrvačností daných objektů vůči těžišti kyvadla (modře vyznačené na obr. 4-12). Nejprve byly spočítány momenty setrvačnosti vůči těžištům každého tělesa a následně aplikována Steinerova věta.



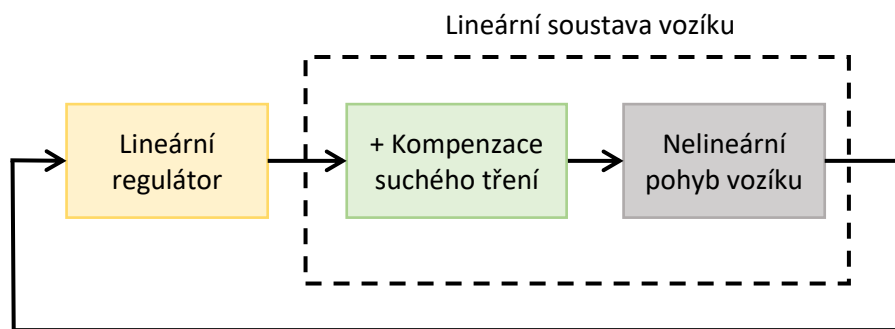
4-12 – Nahrazení kyvadel geometrickými objekty ( $O_I$  – hmotný bod,  $O_{II}$  – tyč,  $O_{III}$  – hranol).

$b_0, b_1, b_2$  Koeficienty viskózního tření nebylo možné jednoduše stanovit výpočtem. Byly kompletně určeny na základě naměřených dat.

### Odhad parametrů vozíku

Lagrangeovy rovnice (viz kapitola 3.1.1) uvažují pouze viskózní tření. U pohybu vozíku je ale také nezanedbatelné tření suché. To je však jevem nelineárním a způsobuje nesnáze při řízení lineární regulátorem. Princip použitého řešení spočívá v přidání kompenzace suchého tření tak, že se soustava z pohledu regulátoru jeví lineární. Měření dat a následná estimace parametrů vozíku již probíhala na této, z vnějšku lineární, soustavě.

Prvním problémem je odhad velikosti suchého tření. Jedním z možných přístupů je pomalé zvyšování síly působící na vozík, dokud ten není uveden v pohyb. Zmíněný způsob nebyl shledán ideálním, jelikož opakované pokusy nepřinesly stejné výsledky. I když počáteční podmínky experimentu, alespoň z makroskopického pohledu, byly pro všechny opakování stejné. Tření je totiž obecně komplexní záležitost a závisí na množství mikroskopických faktorů. Možné zkvalitnění metody je provést experiment několikrát a to i na různých místech lineárního vedení. Následně vzít průměrnou hodnotu.

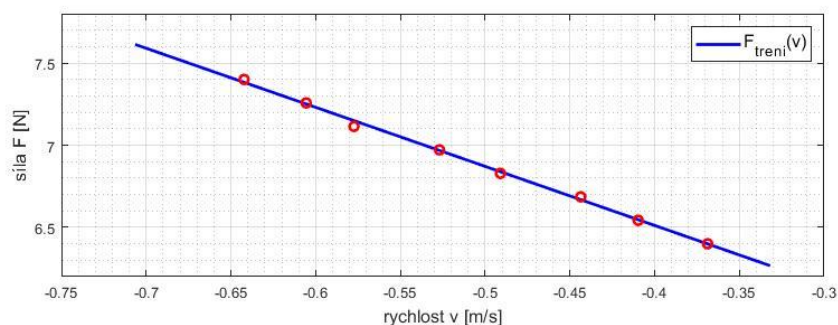


4-13 – Kompenzace suchého tření

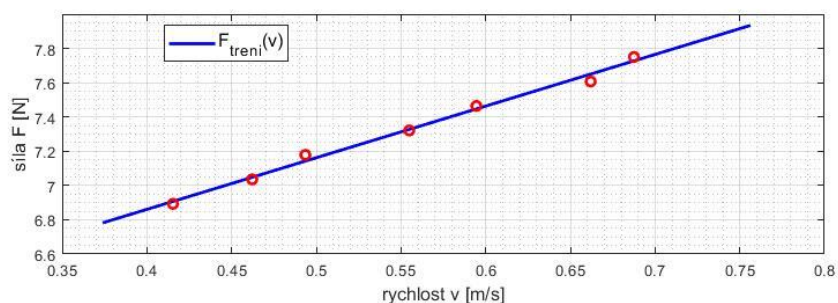
Vhodnější se jevil následující experiment s cílem určit velikost kinematického suchého tření. Na vozík je aplikovaná konstantní síla, která jistě způsobí jeho pohyb. Vozík akceleroje, ale po čase se vlivem působícího tření jeho rychlost ustálí.

Pro různě velké síly byly uloženy konečné rychlosti  $v$  a zaneseny do grafu (4-14 a 4-15). Naměřenými body byla proložena přímka a jako suché tření byla vzata funkční hodnota získané závislosti při nulové rychlosti. Vozík vykazuje odlišné chování pro každý směr posunu, proto byl experiment realizován pro rychlosti kladného i záporného smyslu. Odhadovaná suchá tření jsou uvedeny v tabulce 4-1.

Suché tření vždy působí proti směru pohybu. Jeho kompenzace tedy spočívá v prostém přičtení  $F_s^{+/-} \text{sign}(v)$  ke vstupní síle. Funkce signum byla nahrazena násobením a saturací, dle 4-17.



4-14 – závislost ustálené rychlosti na působící síle (záporný směr pohybu)



4-15 – závislost ustálené rychlosti na působící síle (záporný směr pohybu)

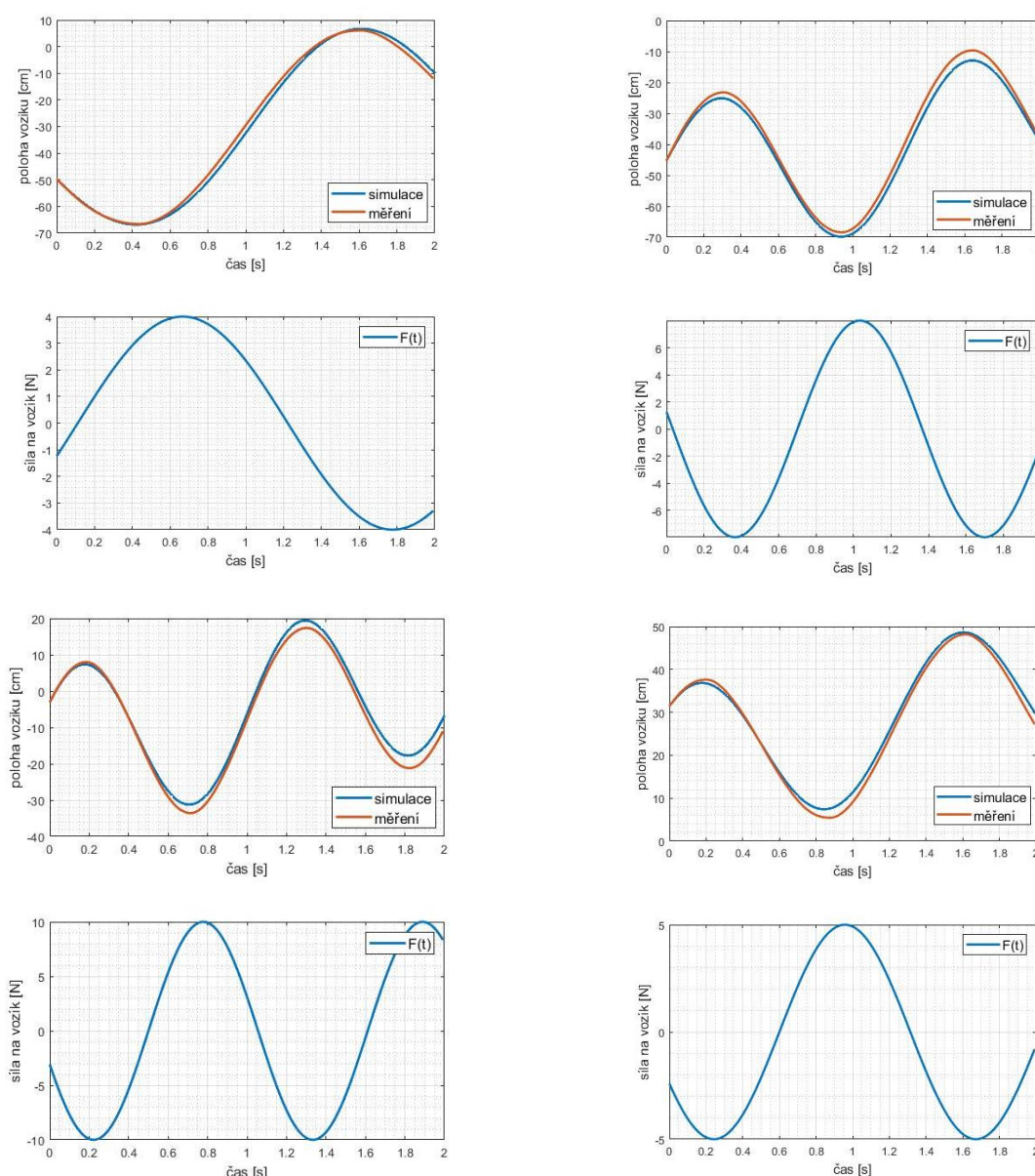


Pro nulové rychlosti, respektive blízké nule, bylo znaménko kompenzace určováno ze směru vstupní síly. To aby bylo možné provést experiment i pro nižší vstupní síly, při kterých by se vozík bez kompenzace vůbec nerozjel. Jelikož  $\text{sign}(0) = 0$ .

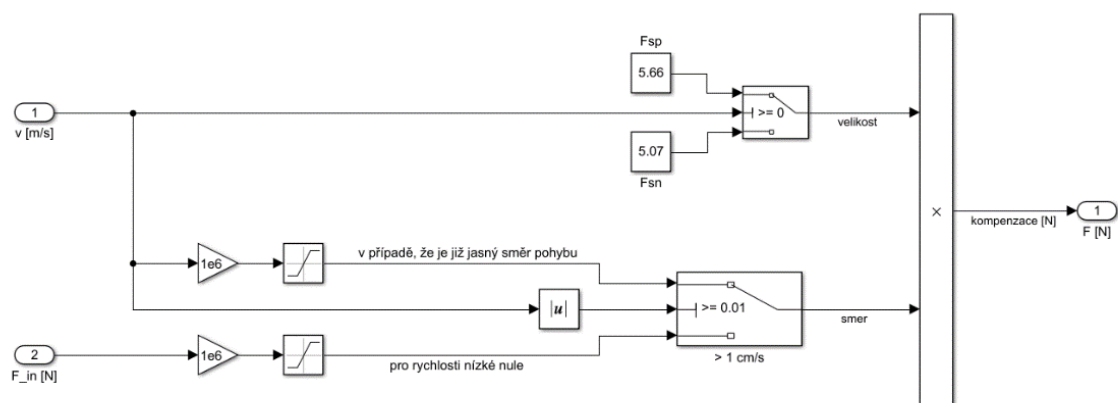
Estimace zbylých parametrů byla provedena pomocí *parameter estimation* v Simulinku. Pro naměřená data byl uvažován lineární model (4.4). Pro jednoznačnost řešení bylo simulováno (4.5) a následně přepočítáno ( $m_0 = 1/k_1$ ;  $b_c^{+/-} = k_2/k_1$ ). Odhad i následné ověření bylo realizováno pro síly sinového tvaru různých amplitud a frekvencí (viz obrázek 4-16).

$$m_0 \ddot{\theta}_0 + b_c \dot{\theta}_0 = F(t) \quad (4.4)$$

$$\ddot{\theta}_0 = k_1 F(t) - k_2 \dot{\theta}_0 \quad (4.5)$$



4-16 – Validace parametrů vozíku



4-17 – Kompenzace suchého tření (Simulink)

Přes veškerou snahu zajistit konstantní tření po celé délce lineárního vedení, závisí velikosti suchého a viskózního tření na poloze vozíku. To je jedním z možných vysvětlení pro odchylku mezi naměřenými a simulovanými daty v 4-16. K odstranění závady by přispělo preciznější vzájemné polohování komponent mechanismu ozubeného řemenu, kterého však v daných podmínkách šlo stěží dosáhnout. Do jisté míry by bylo možné tuto nedokonalost kompenzovat uvažováním různých koeficientů viskózního tření podle aktuální pozice vozíku.

Přesto vše je možné na základě 4-16 prohlásit, že estimace parametrů vozíku proběhla vcelku úspěšně. A lze tedy predikovat chování vozíku s malou odchylkou od skutečných trajektorií.

Bohužel se nepodařilo snížit redukovanou hmotnost vozíku tak, jak bylo předpokládáno. Úbytek hmotnosti je asi deset procent oproti stávajícímu modelu.

Hmotnost vozíku	$m_0 = 1,355 \text{ kg}$
Koeficient viskózního tření (kladný směr)	$b_c^+ = 2,114 \text{ Nsm}^{-1}$
Koeficient viskózního tření (záporný směr)	$b_c^- = 2,934 \text{ Nsm}^{-1}$
Suché tření (kladný směr)	$F_s^+ = 5,66 \text{ N}$
Suché tření (záporný směr)	$F_s^- = 5,07 \text{ N}$

4-1 – Parametry vozíku

### Odhad parametrů kyvadel

V modelu dvojitého kyvadla vystupují parametry (hmotnosti, délky, ...) ve složitých poměrech a součtech tak, že existuje nekonečně mnoho řešení jejich odhadu. Naštěstí je možné úlohu rozdělit na dvě části: estimovat každé kyvadlo zvlášť a následně výsledné parametry spojit.



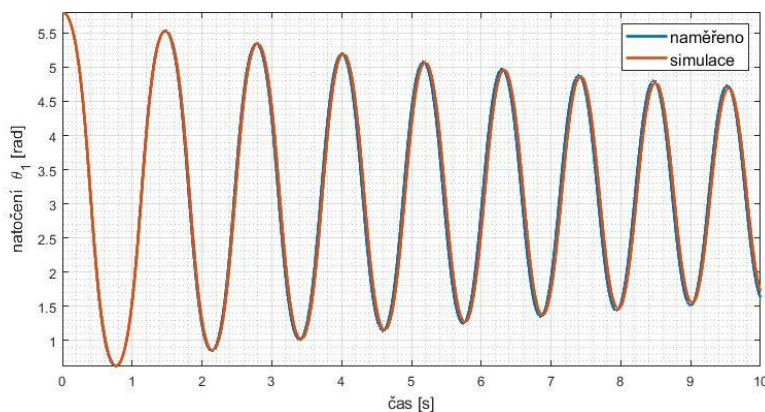
Bylo uvažováno jednoduché kyvadlo popsané rovnicí (4.6). Pro jednoznačnost řešení se však simulovalo (4.7). Estimace byla provedena pomocí *parameter estimation* v Simulinku na základě naměřených dat z volného pádu kyvadel z inverzní polohy. Následně byly parametry spočítány podle (4.8) a (4.9). Hmotnosti a polohy těžišť se v tomto případě braly jako přesně poznané, což byl do velké míry odůvodněný předpoklad.

$$(m_i l_i^2 + I_i) \ddot{\theta}_i + b_{ci} \dot{\theta}_i = m_i g l_i \sin \theta_i \quad (4.6)$$

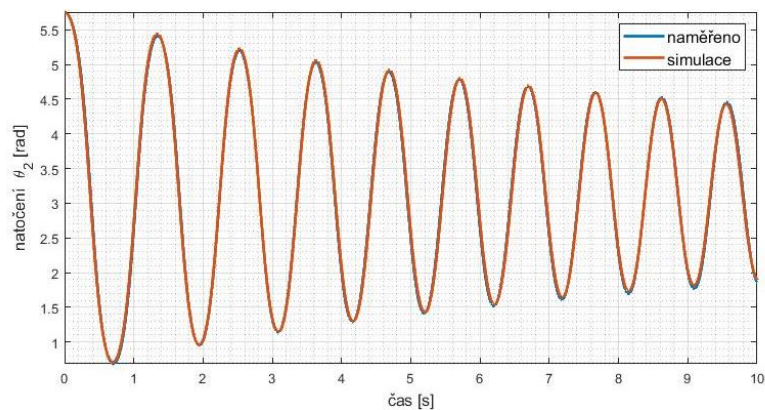
$$\ddot{\theta}_i = k_1 \theta_i - k_2 \dot{\theta}_i \quad (4.7)$$

$$I_i = \frac{m_i l_i (g - k_1 l_i)}{k_1} \quad (4.8)$$

$$b_{ci} = k_2 (m_i l_i^2 + I_i) \quad (4.9)$$



4-18 – Validace parametrů prvního kyvadla

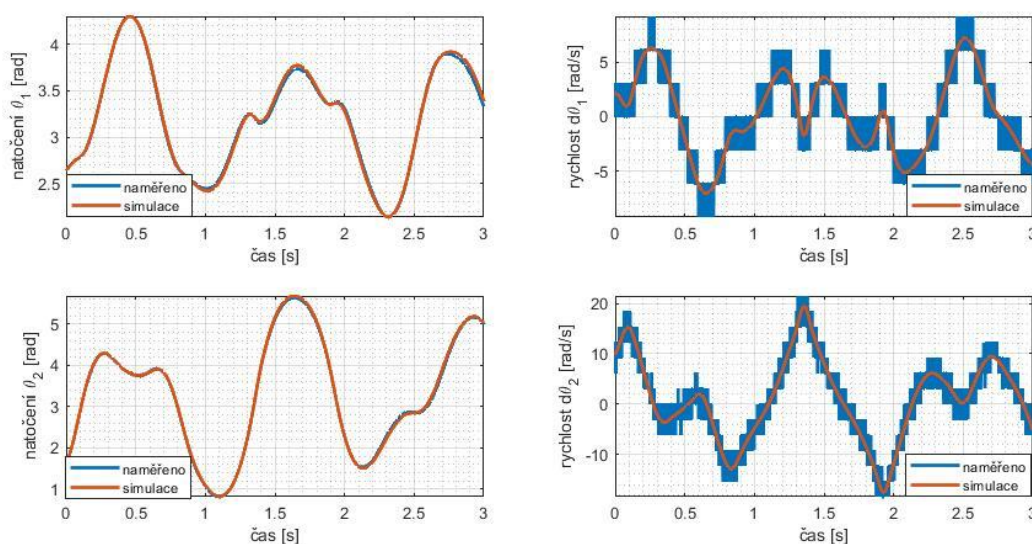


4-19 – Validace parametrů druhého kyvadla

Přidáním druhého kyvadla se změnilo zatížení v rotační vazbě prvního, a tak bylo nutné znovu estimovat koeficient viskózního tření  $b_1$ . Pohybová rovnice pro tento experiment byla získána dosazením nulového vstupu do zjednodušené rovnice dvojitého kyvadla popisované v kapitole 4.3.1.

Při dosazování do (4.8) a (4.9) byla předpokládána přesná znalost hmotností a poloh těžišť obou kyvadel. Ale z důvodu tolerancí použitých měřidel a nejasnosti vlivu kabelu v případě prvního kyvadla, se tyto hodnoty mohly od skutečných trochu lišit.

Díky jednoznačnosti řešení předchozího experimentu na samostatných kyvadlech je možné předpokládat, že se odhadované parametry nachází alespoň blízko jejich skutečných hodnot. Takže i nákladová funkce, kterou je estimací snaha minimalizovat, je v okolí svého globálního minima. To umožnilo spolu s koeficientem viskózního tření prvního kyvadla estimovat i všechny ostatní parametry za účelem zpřesnění modelu. Což by bez znalostí dobrých počátečních odhadů všech parametrů nebylo vůbec možné. Data pro experiment byla naměřena při volném pádu dvojitého kyvadla za současného zabránění pohybu vozíku. Estimace probíhala rovněž s využitím *parameter estimation* v Simulinku.



4-20 – Validace parametrů dvojitého kyvadla

Výsledný model v naprosté většině případů spolehlivě popisuje chování reálné soustavy po dostatečně dlouhý čas (viz grafy na obrázku 4-20). A to i v situacích, kdy druhé kyvadlo prochází v rychlém sledu svými inverzními polohami. Nutno podotknout, že model není stoprocentně úspěšný. V některých úsecích (převážně na začátku – kdy je kinetická energie kyvadel vysoká) se simulace s naměřenými daty přece jen rozchází, třeba už po půl sekundě.

Obecně je možné prohlásit, že estimace parametrů celého systému dopadla velmi úspěšně a slibuje možnost kvalitního řízení.

$l_1$ [cm]	$l_2$ [cm]	$m_1$ [g]	$m_2$ [g]
12,95	11,3	134,5	71,5
$I_1$ [gm <sup>2</sup> ]	$I_2$ [gm <sup>2</sup> ]	$b_1$ [mNs/rad]	$b_2$ mNs/rad
1,186	0,469	0,155	0,106
$L_1$ [cm]			
23,12			

4-2 – Tabulka parametrů dvojitého kyvadla

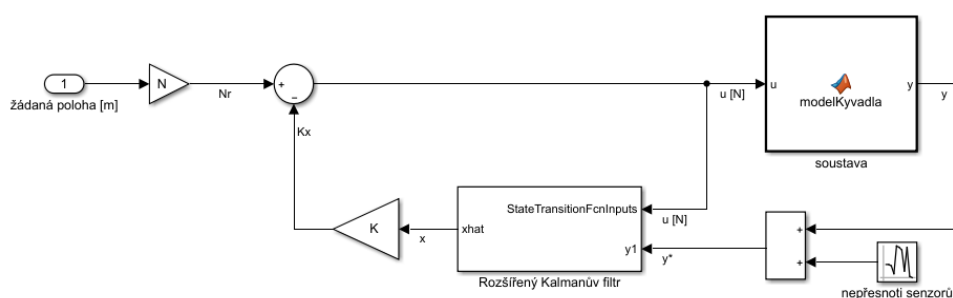
## 4.5. LQG řízení

V kapitole 3.1.2 byl objasněn způsob získání lineárních rovnic systému, popsaného maticemi  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$ . Funkcí *lqr* v programu MATLAB byly na základě (diskrétního) modelu a zadaných váhových matic  $\mathbf{Q}$  a  $\mathbf{R}$  spočítány optimální řídicí násobky  $\mathbf{K}$ . Jako pozorovatel byl využit rozšířený Kálmánův filtr, který provádí korekci na základě měření polohy vozíku a natočení kyvadel. Ladění LQR a nelineárního pozorovatele proběhlo nejprve v simulaci a následně bylo upřesněno experimentem na reálné soustavě.

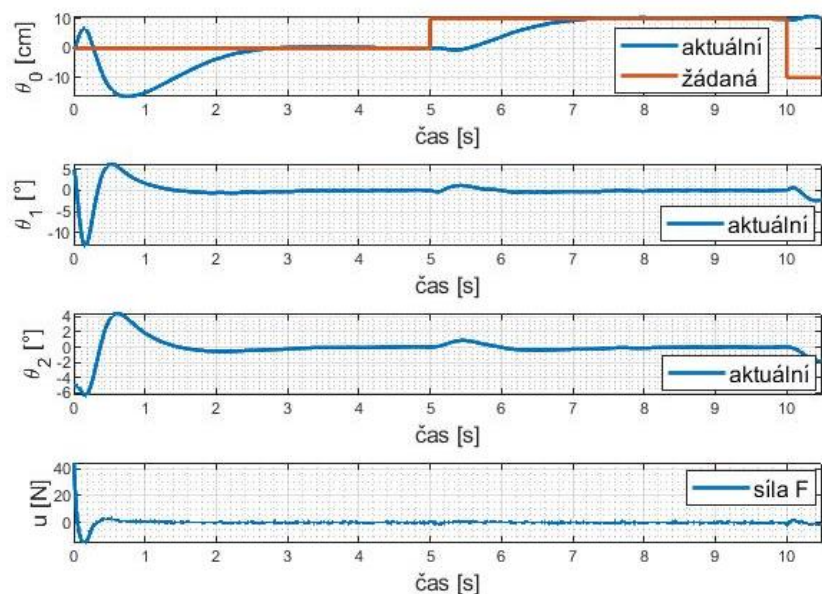
### Simulace

Šum senzorů byl v této fázi simulován náhodnými čísly s Gaussovým rozložením okolo nulové střední hodnoty. Přesto byl úkol stabilizace velmi snadný ve srovnání s následným laděním na reálné soustavě. Cílem simulace bylo především ověřit správnost naprogramování a funkčnost algoritmu.

Na obrázku 4-22 je zobrazen průběh stabilizace pro počáteční podmínky  $\theta_1 = 5^\circ$  a  $\theta_2 = -5^\circ$ . Červeně je zde vyznačena žádaná poloha vozíku. Polohování vozíku lze totiž poměrně snadno docílit, neboť na  $\theta_0$  jako jediném ze stavů není stabilita systému závislá. Řídicí zákon byl dán jako  $u(t) = \mathbf{N}r(t) - \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ , kde  $r(t)$  je žádaná poloha vozíku,  $\mathbf{N} = -\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{C}^T$  a pro tento případ  $\mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ . Použitý algoritmus LQG je schematicky zobrazený na obrázku 4-21.

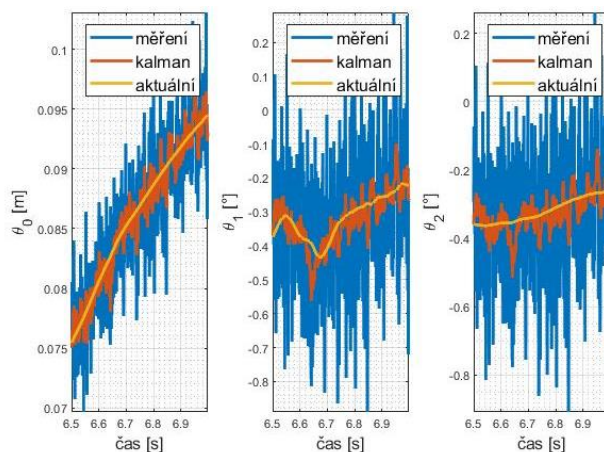


4-21 – Blokové schéma řídicího algoritmu stabilizace



4-22 – Průběhy polohy vozíku a natočení kyvadel během stabilizace LQR

Je vhodné poznamenat, že velikosti vstupních sil navrhované LQR jsou fyzicky realizovatelné. Práce pozorovatele je patrná z grafů na obrázku 4-23.



4-23 – Průběhy aktuálních stavů, měření zatížené šumem a odhad pozorovatele

Maximální počáteční natočení kyvadel, při kterých se podařilo simulovaný systém stabilizovat, jsou uvedeny v 4-3 – Tabulka.

Počáteční natočení	První kyvadlo [°]	Druhé kyvadlo [°]
Stejným směrem	24	24
Různým směrem	11	–11
První nulové	0	19
Druhé nulové	22	0

4-3 – Tabulka hraničních počátečních podmínek



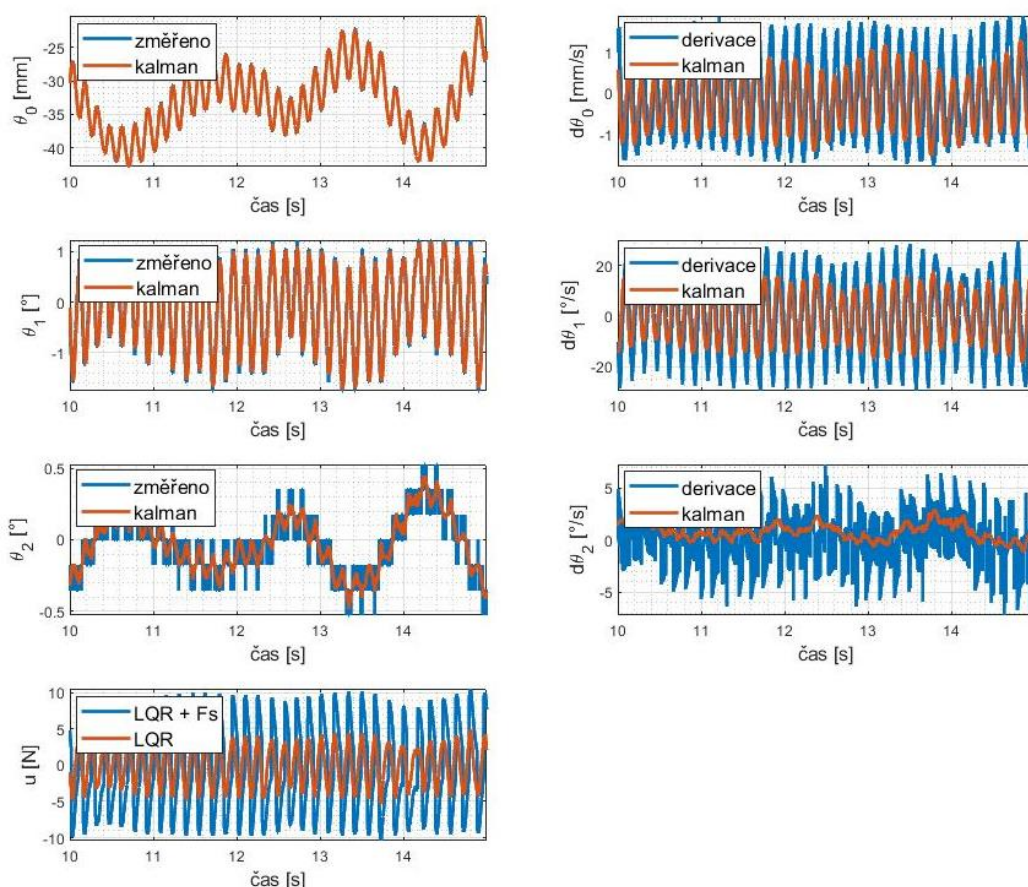
## Experiment

Ukázalo se, že kompenzace suchého tření příliš ovlivňuje chování systému a znesnadňuje stabilizaci. Z tohoto důvodu byl snížen multiplikátor rychlosti (viz obrázek 4-17) tak, že kompenzace suchého tření pracuje i mimo saturevanou oblast, kde je lineárně závislá na rychlosti vozíku.

Lineární kvadratický regulátor byl naladěn podle (4.10) a (4.11). Vyšlo najevo, že je nutné klást důraz především na polohy kyvadel, čímž se systém stává robustnějším. Bohužel se nepodařilo naladit regulátor, aby dobře dodržoval i nulovou polohu vozíku. To ale není v tomto případě podstatné. Pokud by na poloze vozíku velmi záleželo, měl by být na vstup přidán integrátor. Průběhy síly navržené LQR jsou k nahlédnutí na obrázku 4-24. Modře je pak vyznačená reálná síla na vozík, i s kompenzací suchého tření.

$$\mathbf{Q}_{\text{LQR}} = \text{diag}([90 \quad 650 \quad 650 \quad 0 \quad 0 \quad 0]) \quad (4.10)$$

$$\mathbf{R}_{\text{LQR}} = 0,5 \quad (4.11)$$



4-24 – Stabilizace reálné soustavy pomocí LQG

Přínos pozorovatele je patrný především na odhadech rychlostí, které nejsou přímo měřeny. Z průběhů stavů při stabilizaci na 4-24 lze konstatovat, že odhady Kálmánovým filtrem jsou poněkud střízlivější než derivace polohy, které byly následně filtrovány, a proto se vůči skutečné hodnotě opoždují.

$$\mathbf{Q}_{\text{kalm}} = \text{diag}([0,1 \ 0,006 \ 0,006 \ 0,3 \ 0,6 \ 0,6]) \quad (4.12)$$

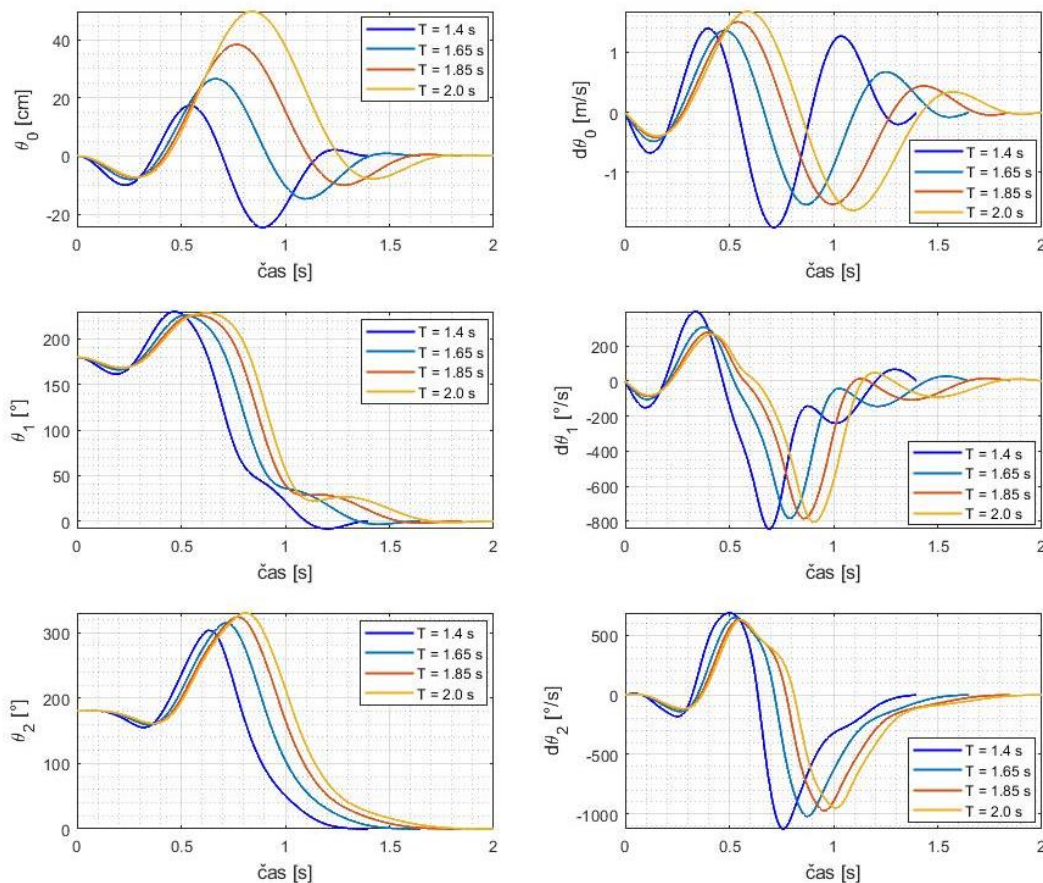
$$\mathbf{R}_{\text{kalm}} = \text{diag}([0,1 \ 0,5 \ 0,5]) \quad (4.13)$$

## 4.6. Swing-up

Tato kapitola popisuje postup získání trajektorií swing-upu a následnou aplikaci dopředného a zpětného řízení.

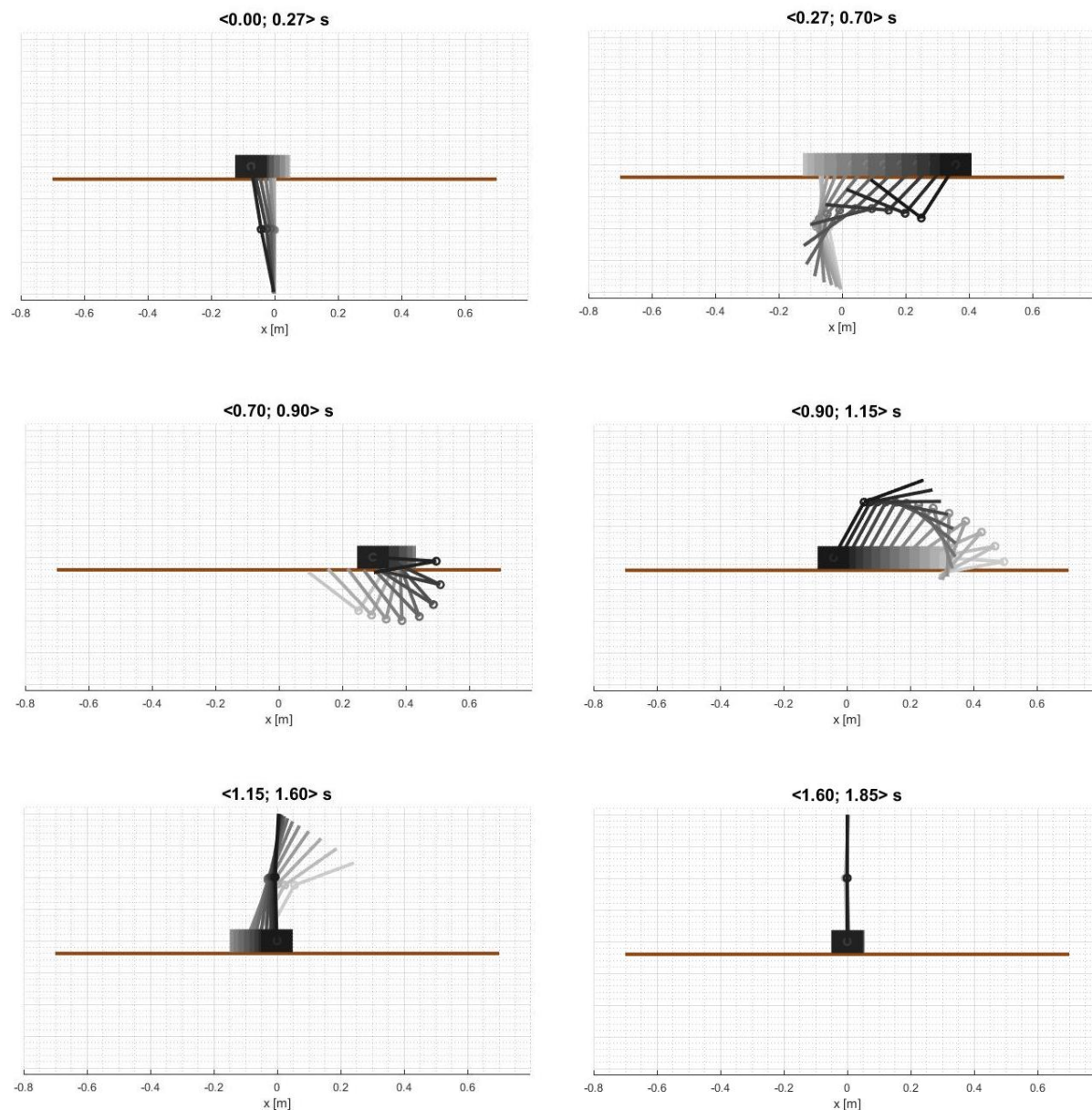
### Tvorba trajektorií

K nalezení vhodných trajektorií swing-upu, podle metody popsané v kapitole 3.4.1, byl využit numerický řešič *bvp4c* v programu MATLAB. Pro zjednodušený model dvojitého kyvadla, kde vstupem je zrychlení vozíku, byly uvažovány okrajové podmínky (3.51) a (3.52). Vyjma definování koncové polohy vozíku a jeho rychlosti, pro které je okrajová hodnota zaručena volbou vstupu jako kosinové řady (3.53).



4-25 – Trajektorie navržené *bvp4c* pro různé doby trvání swing-upu

Pro simulační účely byly vybrány trajektorie s délkou trvání 1,85 sekundy. Průběh takového swing-upu je názorně vyobrazen sekvencí obrázků 4-26.



4-26 – Zjednodušené grafické zobrazení swing-upu (odstínem je vyznačena časová posloupnost)

Počáteční odhady parametrů funkce *bvp4c* byly nastaveny  $\mathbf{p} = [0,0,0,0]$ . Co se týče odhadů trajektorií natočení kyvadel, byly uvažovány lineární interpolace mezi příslušnými okrajovými podmínkami. Poloha vozíku a všechny rychlosti byly odhadnuty nulovým vektorem odpovídající délky.

Stěžejní je nastavení času  $T$ , ve kterém má k swing-upu dojít. Smysluplná řešení byla nalezena na intervalu od 1,3 do 2,05 sekundy. Pro jiné časy bylo řešení nereálné – například několikametrový posun vozíku a extrémní rychlost kyvadel, nebo nebylo nalezeno vůbec. Z grafu 4-25 jsou patrné jisté závislosti. Se zvyšující se dobou trvání swing-upu rostou mezní hodnoty polohy vozíku a klesají extrémy rychlostí kyvadel. Je vhodné poznamenat, že nutné zrychlení vozíku je pro všechny zobrazené sety trajektorií reálně dosažitelné.

Výstupem funkce *bvp4c* je řešení okrajového problému na řešičem definované časové mřížce. Pro daný časový krok řídicího programu byly trajektorie získány funkcí *deval*, taktéž v prostředí MATLAB.

### Feedforward řízení

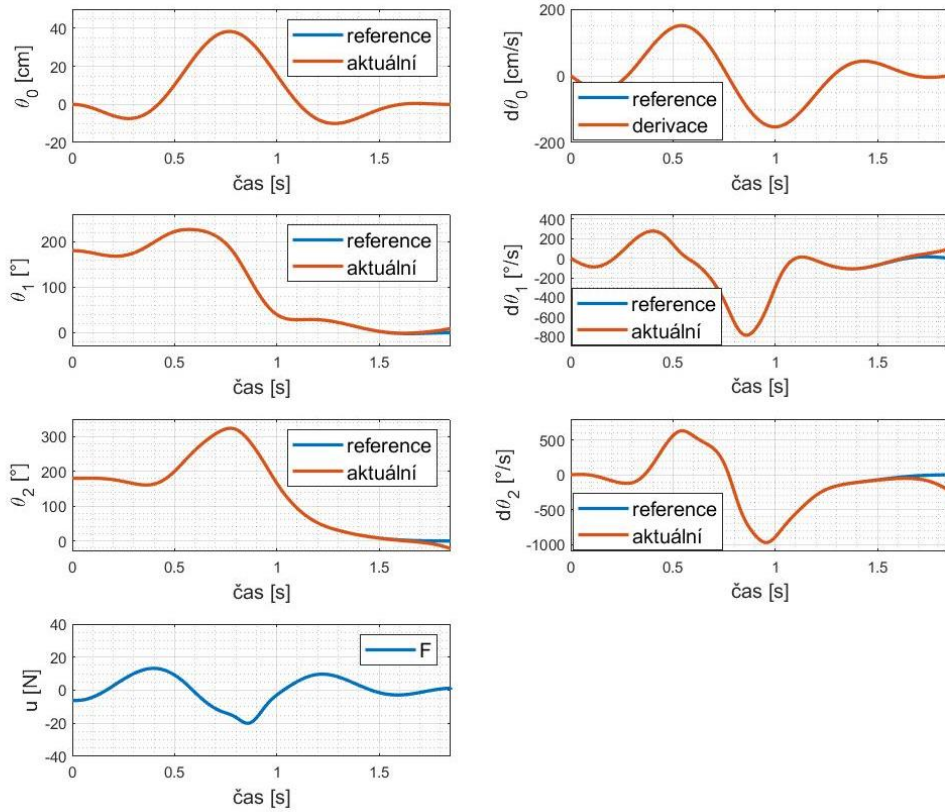
V simulaci swing-upu je možné použít přímo dříve vypočítané zrychlení vozíku pro zjednodušený model, resp. přepočítat ho na potřebnou sílu podle částečné feedback linearizace dle vztahu (3.63) pro model úplný (v Simulinku realizováno bločkem MATLAB function, viz obrázek 4-27). Takovéto řešení je však prakticky nepoužitelné pro reálný model. Především kvůli nedokonalé přesně modelovaným vlastnostem pohybu vozíku a dalším nepřesnostem v uvažovaném modelu oproti realitě. Proto byl jako alternativa aplikovaný PI regulátor na rychlost vozíku.

Už simulace jasně ukazují extrémní citlivost systému na veškeré nepřesnosti. Malé odchylky v závěru výšvihu je dosaženo již pouhou změnou řešiče a časového kroku (viz obrázek 4-28). Další nepřesnosti vnáší šum na senzorech, přidáný stejně jako při simulaci LQG řízení. Úspěšnému swing-upu však hlavně brání časové zpoždění a byť drobná nepřesnost PI regulace. To dokazuje obrázek 4-29. Poloha vozíku se zde prakticky neliší od žádané hodnoty. Přesto je podstatná odchylka natočení ramen patrná už v čase 1,3 sekundy.

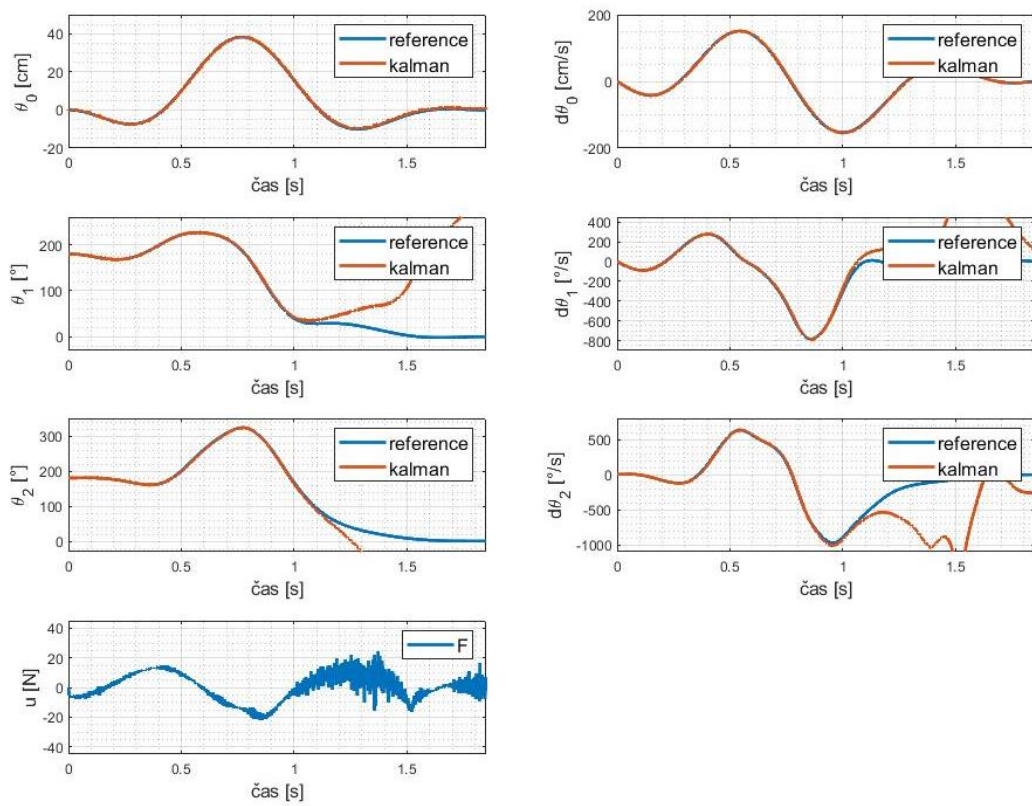


4-27 – Výpočet síly na vozík pro jeho žádané zrychlení na základě aktuálních stavů systému





4-28 – Feedforward swing-up, částečná feedback linearizace (simulace – ode4,  $T_s = 1$  ms)

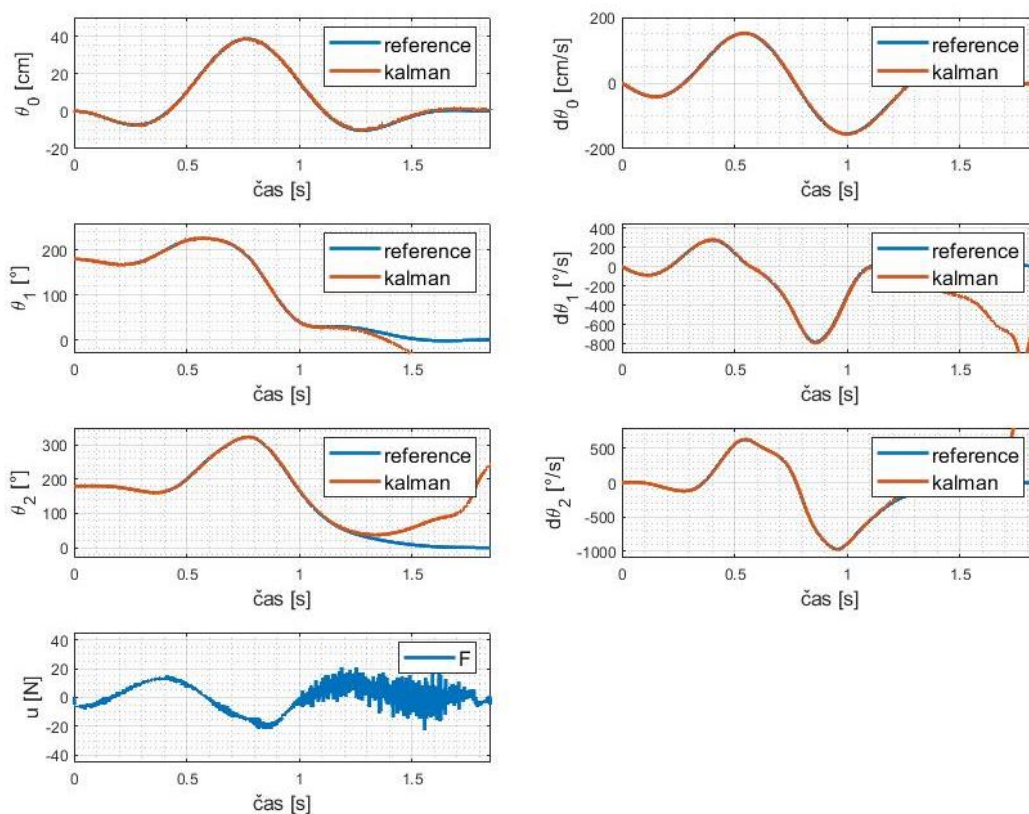


4-29 - Feedforward swing-up, PI regulace rychlosti vozíku (simulace – ode4,  $T_s = 1$  ms)

Co se týče simulace, je možné nedostatky takového řízení dobře kompenzovat pouze přidáním zpětného řízení. Přesto bylo postupováno s ohledem na nutné úpravy pro následující experiment na reálné soustavě. Důsledek časového zpoždění PI regulátoru se do jisté míry projevuje jako změna fyzikálních parametrů soustavy. Pro naměřená data z grafu 4-29 byly proto znovu estimovány všechny parametry kyvadel. Jako vstup bylo uvažováno jmenovité zrychlení vozíku.

Nové modifikované parametry nejsou skutečnými fyzikálními hodnotami, nýbrž reflektují časové zpoždění regulátoru. Pro takto získaný model byly znovu vypočítány trajektorie. Díky této úpravě bylo v simulaci dosaženo zlepšení (v čase, po který aktuální trajektorie korespondují s vypočítanými) asi o 0,3 sekundy, což je významný rozdíl.

Na reálné soustavě bylo v ideálním případě pozorováno ještě větší relativní zlepšení. Nicméně i tak jsou výsledky na reálné soustavě v absolutním smyslu horší. To znamená, že se skutečné trajektorie od vypočítaných začínají lišit dříve.



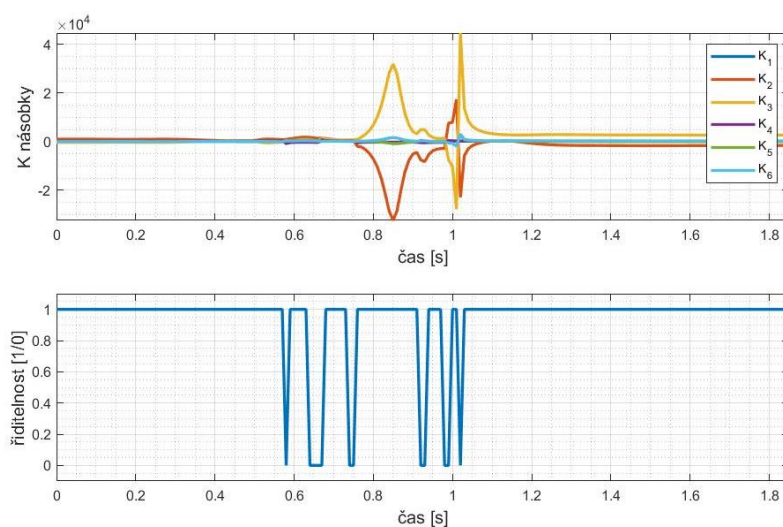
## Feedback kompenzace

Na základě poznatků z teoretické části této diplomové práce byl vytvořen časově závislý lineární regulátor podél jmenovité trajektorie swing-upu (s časovým krokem 10 ms a následnou lineární interpolací mezi vypočítanými body). Vyšlo najevo, že po určitý časový interval, prochází řídicí násobky prudkými změnami velikostí i znamének.

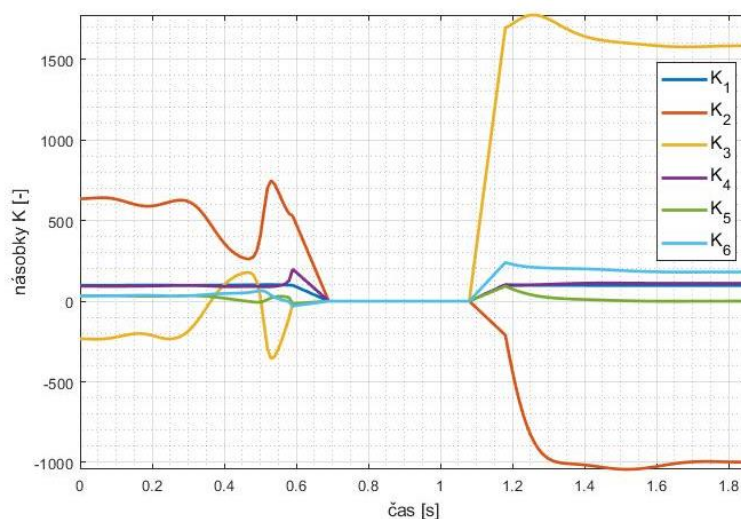
Vzhledem k tomu a také ke skutečnosti, že v těchto okamžicích se systém často nachází na hranici říditelnosti anebo ji ztrácí úplně, bylo rozhodnuto vždy na čas zpětné řízení vyřadit z činnosti. Na obr. 4-30 je popsána skutečnost graficky zobrazena pro dobu trvání swing-upu 1,85 sekundy. Situace je obdobná i pro ostatní časy.

Náhlé vypnutí a zapnutí zpětného řízení způsobovalo neúměrně velký impulzní zásah s případným následkem ztráty stability a neúspěšného swing-upu. Proto jsou okolo kritického intervalu násobky lineárně snižovány, resp. zvyšovány. Pro simulaci se osvědčilo stanovit trvání lineární oblasti na 0,1 sekundy. Takto se impulzní zásahy podařilo téměř odstranit (viz průběh síly na obrázku 4-32).

Pokud se natočení kyvadel během swing-upu přiblíží inverzní poloze, je přepnuto na stabilizaci LQG.



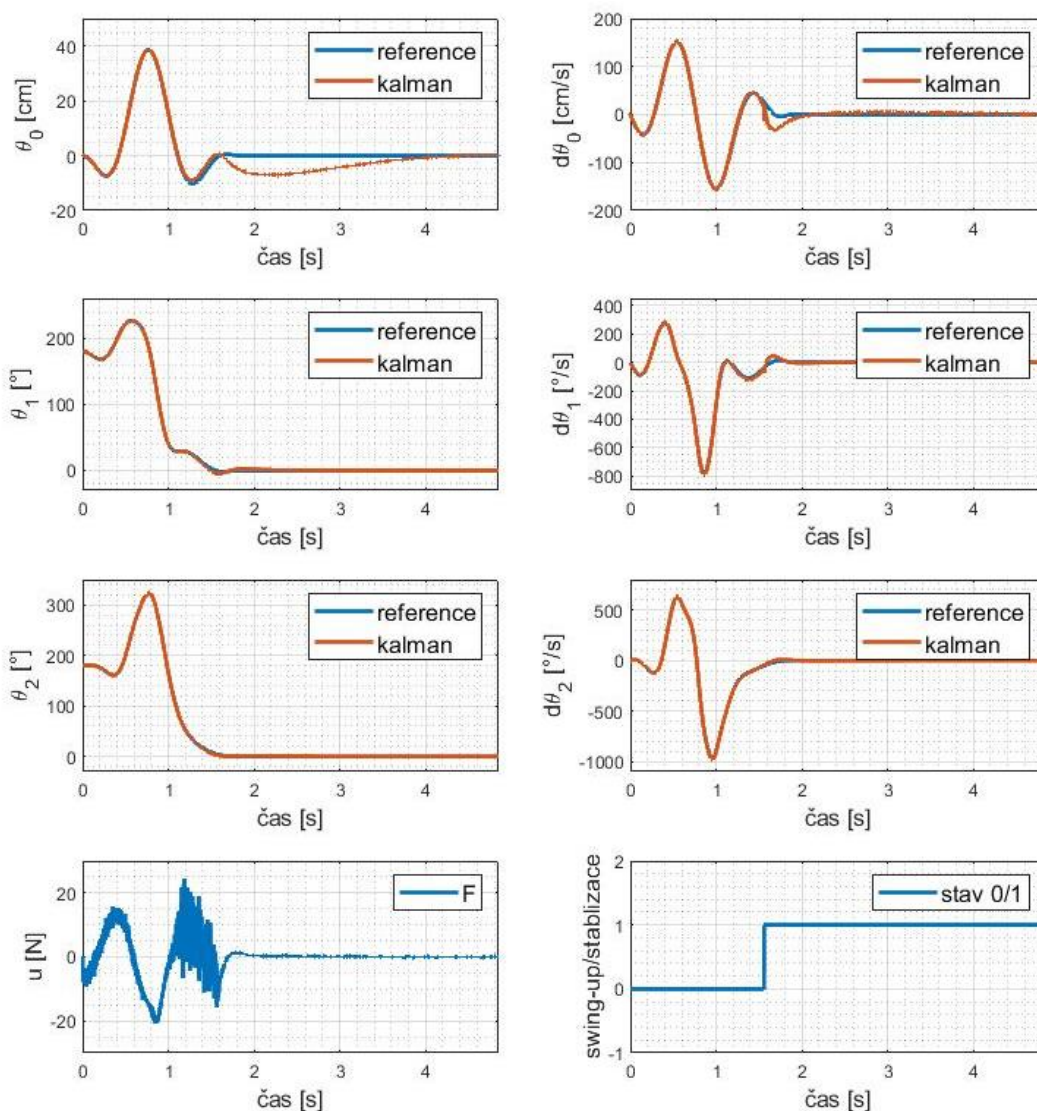
4-30 – Časově závislé řídicí násobky lineárního regulátoru



4-31 – Řídicí násobky s vypnutím a lineární změnou



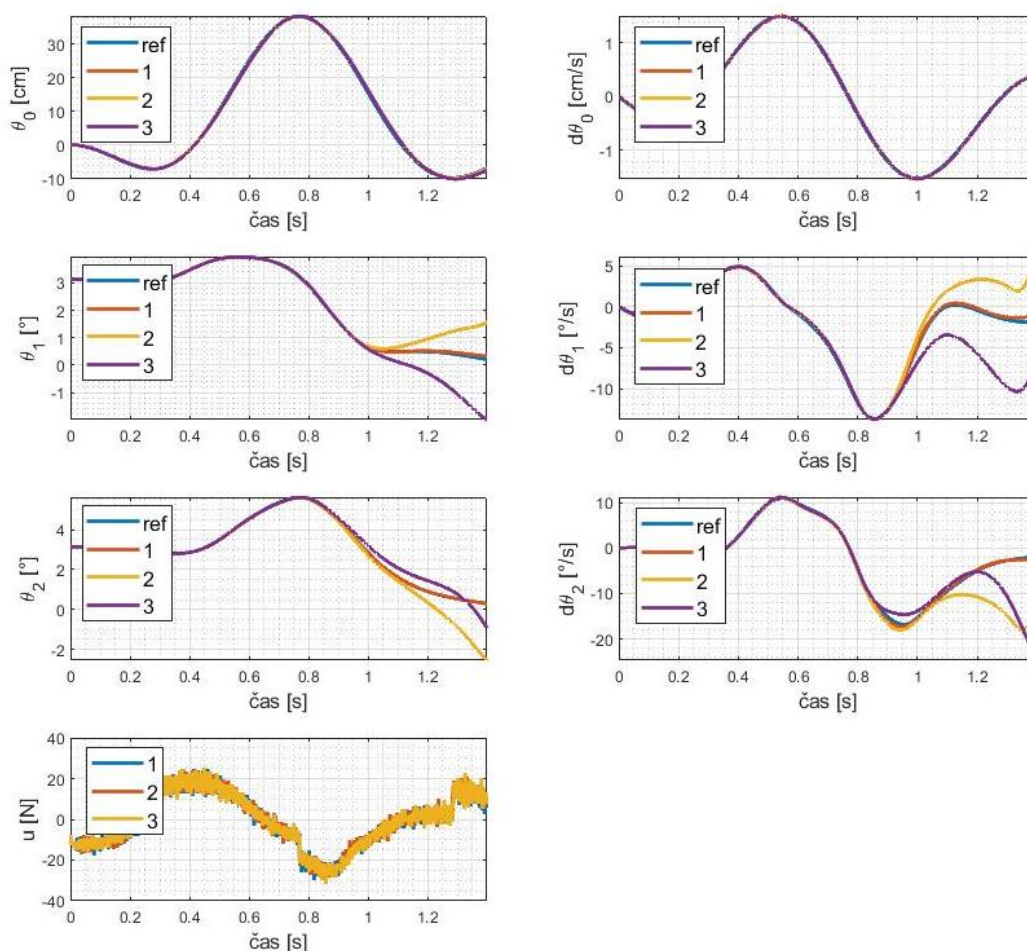
Vzhledem k tomu, že byl lineární regulátor odvozen ze zjednodušeného modelu dvojitého kyvadla, kde vstupem je přímo zrychlení vozíku, i jeho navrhovaný zásah má rozměr zrychlení. Je ho tedy nutné na základě aktuálních stavů přepočítat na sílu podle rovnice (3.63).



4-32 – PI feedforward a LQR feedback swing-up a stabilizace (simulace – ode4,  $T_s = 1$  ms)

Přes provedené simulace, které slibovaly robustnost algoritmu, bylo při pokusech aplikovat navrhovanou swing-up funkci na reálnou soustavu naráženo na množství komplikací. Na rozdíl od stabilizace v inverzní metastabilní poloze, při swing-upu systém prochází velmi nestabilními konfiguracemi. Silně se zde projevuje deterministický chaos s častými bifurkacemi. Jak je patrné z obrázku 4-33.

Zatímco rychlost a poloha vozíku jsou prakticky identické při všech třech zobrazených pokusech, po jistém čase se vlivem malých náhodných odchylek začínají skutečné trajektorie lišit, jak od těch jmenovitých tak i navzájem vůči sobě.



4-33 – Chaotické projevy dvojitého inverzního kyvadla (ref odkazuje na nominální trajektorie; čísla jsou pak označeny jednotlivé pokusy; reálný model – ode4,  $T_s = 1 \text{ ms}$ )

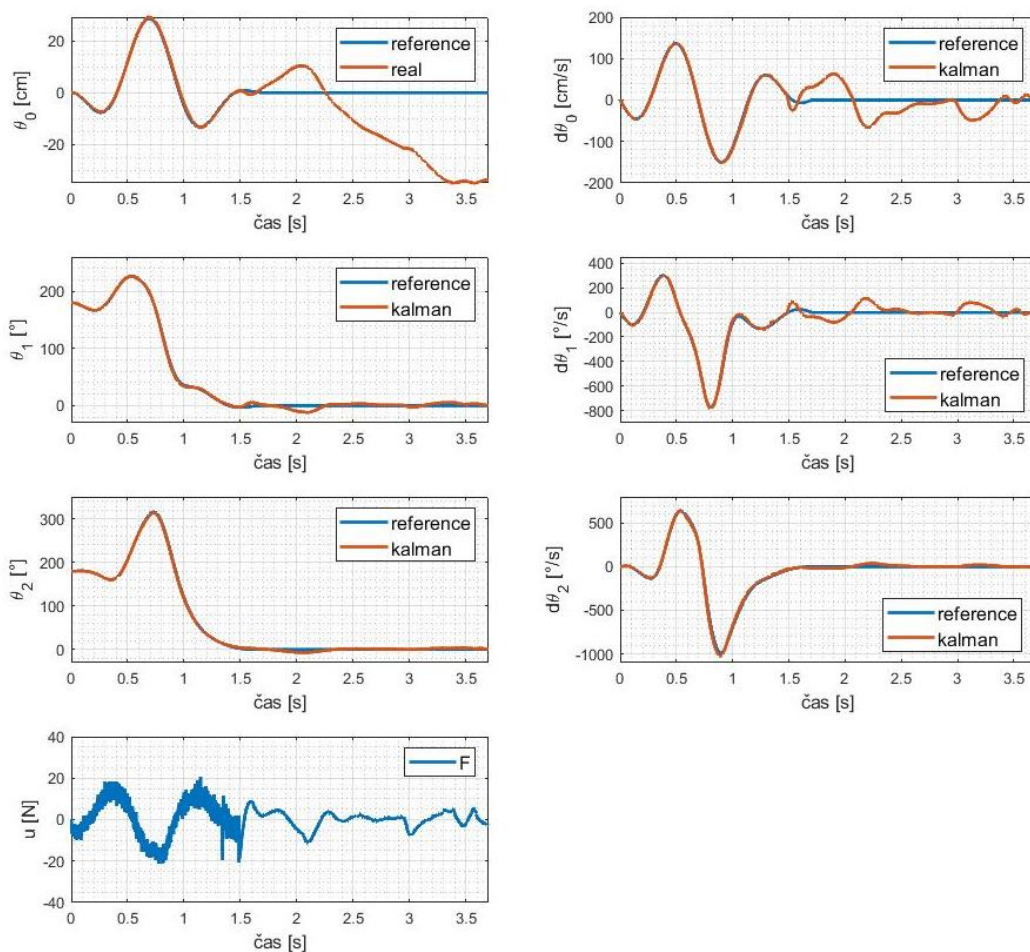
Do jisté míry byly tyto projevy kompenzovány zpětnovazebním lineárním regulátorem. Ten je ovšem nutné na čas vyřadit z provozu kvůli výše uvedeným důvodům říditelnosti. Je tedy třeba, aby dopředná regulace od času vypnutí (0,7 s) do opětovného zapnutí (1,09 s) nezpůsobila prakticky žádnou odchylku. Jak je ale vidět z obrázku 4-33, tento úsek je bohužel nejčastěji poznamenán zmiňovanými projevy deterministického chaosu.

Bylo zjištěno, že při vyšších rychlostech nedochází k tak častým, resp. tolik významným bifurkacím. Proto bylo provedeno množství pokusů i pro kratší časy swing-upu (1,45 s, 1,5 s, 1,55 s, 1,6 s a 1,7 s). Tyto časy ovšem zase kladou větší nároky na zpětnovazební regulátor, který musí reagovat silněji ovšem bez ztráty integrity swing-upu.

Proto byla také vyzkoušena varianta stále zapnutého zpětnovazebního regulátoru. Aby se co nejméně projevil ostré změny řídicích násobků v kritickém časovém úseku znemožňující hladký průběh, byl kladen větší důraz na akční zásah při návrhu regulátoru (až o několik řádů).

Bohužel zde se nepodařilo dosáhnout úspěšného swing-upu ani v simulaci, ačkoli byl zpětnovazební regulátor opětovně kompletně laděn.

Kvůli výše uvedeným problémům se nepodařilo implementovat swing-up, který by bylo možné úspěšně opakovat. Nicméně simulace prokázaly použitelnost navrhovaného algoritmu. A také experiment na reálné soustavě vždy alespoň z části odpovídá očekávanému chování. Několikrát se taktéž podařilo provést zcela úspěšný swing-up s následným přepnutím na stabilizaci, jako na následujícím obrázku.



4-34 – PI feedforward a LQR feedback swing-up a stabilizace (reálný model – ode4,  $T_s = 1$  ms)

Pro experiment na reálné soustavě byly použity tyto modifikované parametry kyvadel:

$l_1^*$ [cm]	$l_2^*$ [cm]	$m_1^*$ [g]	$m_2^*$ [g]
14,46	11,78	142,5	72,7
$I_1^*$ [gm <sup>2</sup> ]	$I_2^*$ [gm <sup>2</sup> ]	$b_1^*$ [mNs/rad]	$b_2^*$ mNs/rad
1,074	0,460	0,172	0,099
$L_1^*$ [cm]			
22,63			

4-4 – modifikované parametry kyvadel pro swing-up

Pro co nejlepší výsledky při swing-upu byly znova estimovány i parametry vozíku na datech po aplikování jmenovité síly, včetně suchého tření. Konstanty suchého tření byly následně empiricky doladěny:

Hmotnost vozíku	$m_0^* = 1,450 \text{ kg}$
Koeficient viskózního tření (kladný směr)	$b_c^{+*} = 3,313 \text{ Nsm}^{-1}$
Koeficient viskózního tření (záporný směr)	$b_c^{-*} = 1,381 \text{ Nsm}^{-1}$
Suché tření (kladný směr)	$F_s^{+*} = 5,45 \text{ N}$
Suché tření (záporný směr)	$F_s^{-*} = 7,37 \text{ N}$

4-5 – modifikované parametry vozíku pro swing-up

Konstanty dopředného řízení jsou zaneseny následující tabulky:

Proporcionální složka dopředného regulátoru	$P = 520$
Integrální složka dopředného regulátoru	$I = 1610$

4-6 – PI regulátor pro rychlost vozíku

Rozšířený zpětnovazební regulátor (s integrátorem na polohu vozíku) byl nastaven následovně:

$$Q_{lqr}^{swing} = \text{diag}([650 \quad 1000 \quad 1000 \quad 15 \quad 105 \quad 105 \quad 0,01]) \quad (4.14)$$

$$R_{lqr}^{swing} = 0,04 \quad (4.15)$$

Bylo také třeba upravit pozorovatele. Zatímco u stabilizace je totiž třeba více věřit modelu, aby byl průběh odhadů stavů hladký, pro swing-up se ukázalo důležité především co nejpresnější odhad aktuální rychlosti vozíku i za cenu méně hladkého signálu:

$$Q_{kalm}^{swing} = \text{diag}([0,15 \quad 0,2 \quad 0,2 \quad 250 \quad 35 \quad 35]) \quad (4.16)$$

$$Q_{kalm}^{swing} = \text{diag}([0,1 \quad 0,2 \quad 0,2]) \quad (4.17)$$

Protože se zásah zpětnovazebního regulátoru také projeví nedodržením přesné trajektorie vozíku a jeho pozice nemusí skončit ve středu kolejnice, bylo upraveno řízení při stabilizaci. Byl přidán integrátor na polohu vozíku a taktéž empiricky doladěny konstanty suchého tření.

$$Q_{lqr}^{stab} = \text{diag}([40 \quad 890 \quad 890 \quad 0,5 \quad 12 \quad 12 \quad 0,01]) \quad (4.18)$$

$$R_{lqr}^{stab} = 0,4 \quad (4.19)$$

Suché tření (kladný směr)	$F_s^{+*} = 6,01 \text{ N}$
Suché tření (záporný směr)	$F_s^{-*} = 6,23 \text{ N}$

4-7 – suché tření při stabilizaci v inverzní poloze

## 4.7. Zapojení a program

V této poslední kapitole praktické části je uvedeno zapojení karty MF624 a popsán řídicí program v Simulinku.

### Zapojení karty MF624

Pro distribuci napěťových hladin 5V a GND na více míst byly použity wago svorky. V Simulinku byla reset input function všech enkodérových stupňů nastavena na *gate*.

Funkce		Pin karty MF624	Barva signálového vedení	
ESCON	AI +	DA5	zelená	
	AGND	AGND	hnědá	
	DIR	DOUT4	oranžová	
	ENABLE	DOUT1	žlutá	
	GND	GND	červená	
Indukční snímače	pravý	DIN1	fialová	
	levý	DIN0	šedá	
Enkodér	1. kyvadla	IRC1	$A^+$	$B^+$
			5 V	GND
	2. kyvadla	IRC3	$A^+$	$B^+$
			5 V	GND
	Vozíku	IRC2	$A^+$	$B^+$
			5 V	GND

4-8 – Zapojení karty MF624 (X1, X2)

### Řídicí program

Hlavní program sestává ze dvou stavů a několika ochran, které mají zabránit poškození modelu a ukončit zbytečnou simulaci. Rozhodovací centrum je realizováno blokem Matlab function. Začíná se realizací swing-upu. V tomto stavu se kontroluje vyjetí vozíku z dráhy a namotání kabelu enkodéru druhého kyvadla na hřídelku prvního.

Při swing-upu z neznámých důvodů dochází na ESCON jednotce k občasnému samovolnému přepnutí směru proudu. Zpětnovazební regulátory se vzniklou chybou snaží vyrovnat a žádají vyšší sílu. Následkem toho vozík exponenciálně akceleroje a to do opačného směru, než je potřeba.



Byly změřeny signály DIR, analog i ENABLE na osciloskopu, kvůli domněnce na chybu karty, která bývá někdy poruchová. Ale zmiňované signály se drží rozumných a správných průběhů. Softwarové nastavení jednotky ESCON bylo rovněž několikrát kontrolováno, ale zdá se být vše správně zadáno. Proudový regulátor nemá překmity. Úsilí odstranit tento problém bylo věnováno množství času, nicméně bez výsledku.

Zmiňovaná chybová situace se projevuje neúměrně velkým akčním zásahem. Proto je jeho hladina rovněž hlídána. Lze tak alespoň dříve zareagovat na vzniklý problém a předejít poškození modelu.

Pokud se kyvadla přiblíží k inverzní poloze, je přepnuto na stabilizaci LQR. V této fázi se také kontroluje poloha vozíku na kolejnici a program je ukončen, pokud dojde k příliš velké odchylce od inverzní polohy, jelikož zde již regulátor nefunguje správně.

### **Struktura příloh**

Přiložené programy v Matlabu a Simulinku jsou přehledně strukturovány obdobně jako v textu této práce. Většinou každá podsložka obsahuje hlavní skript, ve kterém jsou formou komentářů sepsány základní pokyny pro práci s přílehlými soubory.

## 5 Závěr

Cílem této práce bylo upravit stávající model dvojitého inverzního kyvadla po stránce konstrukční, elektronické i programové.

Mechanika dostala změny především výměnou pohonu ozubeným hřebenem za ozubený řemen. Kotvení jednotlivých mechanických komponent bylo zajištěno hliníkovými součástmi vyrobených z běžně dostupných polotovarů. Celá konstrukce byla vyztužena hliníkovým profilem Rexroth.

Co se týče elektroniky, nejpodstatnější změnou bylo využití komerčního produktu ESCON 70/10 jako proudového regulátoru. Takže jako vstup do systému mohl být uvažován moment motoru, potažmo síla na vozík. Minoritní úpravy byly provedeny na zpracování signálu indukčních snímačů a kabeláži.

Byl získán model dvojitého inverzního kyvadla včetně estimace všech potřebných parametrů. I díky tomu byla implementována robustní a dlouhotrvající stabilizace obou kyvadel v inverzní poloze. Ta je realizována metodou LQR. Stav systému jsou odhadovány nelineárním rozšířeným Kálmánovým filtrem.

Vyřešením okrajového problému numerickým řešičem *bvp4c* byly získány jmenovité trajektorie pro funkci swing-up. Potřebné zrychlení vozíku bylo realizováno regulátorem se dvěma stupni volnosti – dopředným PI řízením rychlosti vozíku a zpětnovazební regulátorem LQR, jehož řídicí násobky byly vypočítány off-line podél jmenovitých trajektorií a vstupu. Vzhledem k chaotickému chování reálné soustavy bohužel nebylo dosaženo plánovaného swing-upu, který by byl snadno opakovatelný. Přesto se algoritmus osvědčil alespoň simulačně. V praxi nebyl schopen dobře kompenzovat vzniklé odchylky od jmenovitých trajektorií. Na druhou stranu se i tak kompletní swing-up několikrát zrealizovat podařilo.

Do budoucna by bylo vhodné upravit mechaniku zařízení, která byla jedním ze zdrojů nepřesností. Především kotvící prvky, zajišťující vzájemnou polohu komponent pohybového mechanismu, by měly být vyrobeny profesionálně a přesně. Tak aby bylo správné uložení opravdu co nejlépe dodrženo a vlastnosti pohonu mohly být modelovány co nejspolehlivěji.

Zajímavým projektem by bylo převést řídicí algoritmy z karty MF624 a *external mode* v Simulinku na jinou platformu, například na dSPACE.

## 6 Použitá literatura a odkazy

- [1] *Optimal Control of a Double Inverted Pendulum on a Cart*. Oregon, USA, 2004. Technická zpráva. OGI School of Science & Engineering, OHSU
- [2] SLABÝ, V. *Návrh a realizace demonstračního modelu dvojitého kyvadla*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018. 76 s. Vedoucí diplomové práce Ing. Michal Bastl.
- [3] *PD4266 datasheet* [online]. In: . s. 1 [cit. 2020-03-25]. Dostupné z: <https://www.transmotec.com/Download/Datasheets/PD4266.pdf>
- [4] Kamel Baibeche, Claude Moog. *Input-state feedback linearization of single-input nonlinear timedelay systems*. ECC 2014, Jun 2014, Strasbourg, France. pp.460 - 465, 10.1109/ECC.2014.6862315.hal-00976759
- [5] SLOTINE, JEAN-JACQUES E. a WEIPING LI. *Applied nonlinear control*. 2. New Jersey: Prentice Hall, 1991. ISBN 0-13-040890-5.
- [6] HEDRICK, J.K. a GIRARD, Anouck. (2005). *Control of nonlinear dynamic systems theory and applications*. Class Notes. 62-83.
- [7] AGUIAR, Antonio Pedro. *Nonlinear Control Systems* [online]. In: *IST-DEEC PhD Course*. 2012 [cit. 2020-03-27]. Dostupné z: [http://users.isr.ist.utl.pt/~pedro/NCS2012/07\\_FeedbackLinearization.pdf](http://users.isr.ist.utl.pt/~pedro/NCS2012/07_FeedbackLinearization.pdf)
- [8] HENSON, Michael A. a Dale E. SEBORG. *Nonlinear Process Control* [online]. Kapitola 4 [cit. 2020-03-31]. ISBN 978-0136251798. Dostupné z: <https://cse.sc.edu/~gatzke/cache/npc-Chapter4-nofigs.pdf>
- [9] Nijmeijer, Henk & Respondek, Witold. (1988). *Dynamic Input-Output Decoupling of Nonlinear Control Systems*. Automatic Control, IEEE Transactions on. 33. 1065 - 1070. 10.1109/9.14420.
- [10] NEUSSER, Zdenek a Michael VALÁŠEK. *CONTROL OF THE DOUBLE INVERTED PENDULUM ON A CART USING THE NATURAL MOTION*. In: Acta Polytechnica [online]. 2013, 53(6), s. 883-889 [cit. 2020-03-31]. DOI: 10.14311/AP.2013.53.0883. ISSN 1805-2363. Dostupné z: <https://ojs.cvut.cz/ojs/index.php/ap/article/view/2021>

- [11] *A Comparative Study Of Kalman Filter, Extended Kalman Filter And Unscented Kalman Filter For Harmonic Analysis Of The Non-Stationary Signals. International Journal of Scientific & Engineering Research*, [online]. 2012, 3(7), 1-9 [cit. 2020-04-02]. ISSN 2229-5518. Dostupné z:  
<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.302.3796&rep=rep1&type=pdf>
- [12] TZAFESTAS, Spyros G. *Mobile Robot Control III. Introduction to Mobile Robot Control* [online]. Elsevier, 2014, 2014, , 237-268 [cit. 2020-04-02]. DOI: 10.1016/B978-0-12-417049-0.00007-9. ISBN 9780124170490. Dostupné z:  
<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/B9780124170490000079>
- [13] CHEN, Xianmin, Rongrong YU, Kang HUANG, Shengchao ZHEN, Hao SUN a Ke SHAO. Linear motor driven double inverted pendulum: A novel mechanical design as a testbed for control algorithms. *Simulation Modelling Practice and Theory* [online]. Elsevier, 2018, 2014, 81, 31-50 [cit. 2020-04-02]. DOI: 10.1016/j.simpat.2017.11.009. ISBN 9780124170490. ISSN 1569190X. Dostupné z:  
<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1569190X17301703>
- [14] FRIDMAN, Leonid, Jaime MORENO a Rafael IRIARTE. *Sliding modes after the first decade of the 21st century: state of the art* [online]. Berlin: Springer Verlag, c2011 [cit. 2020-04-02]. Lecture notes in control and information sciences, 412. ISBN 978-364-2221-644.
- [15] Stabilization of the Double Inverted Pendulum Based on Discrete-time Model Predictive Control. *International Conference on Automation and Logistics* [online]. 2011, , 243-247 [cit. 2020-04-02]. Dostupné z: <https://ieeexplore-ieee-org.ezproxy.lib.vutbr.cz/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=6024721>
- [16] *Type-1/type-2 fuzzy logic systems optimization with RNA genetic algorithm for double inverted pendulum*. *Applied Mathematical Modelling* [online]. 1. 2015, s. 70-85 [cit. 2020-04-02]. Dostupné z:  
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X14002054?via%3Dihub>
- [17] BOGDANOV, Alexander. *Optimal Control of a Double Inverted Pendulum on a Cart*. Technical Report [online]. 2004 [cit. 2020-04-02]. Dostupné z:  
[https://www.researchgate.net/publication/250107215\\_Optimal\\_Control\\_of\\_a\\_Double\\_Inverted\\_Pendulum\\_on\\_a\\_Cart](https://www.researchgate.net/publication/250107215_Optimal_Control_of_a_Double_Inverted_Pendulum_on_a_Cart)

- [18] MON, Yi-Jen a Chih-Min LIN. Double inverted pendulum decoupling control by adaptive terminal sliding-mode recurrent fuzzy neural network. Technical Report [online]. 2014, 26(4), 1723-1729 [cit. 2020-04-02]. DOI: 10.3233/IFS-130851. ISSN 10641246. Dostupné z: <http://web.a.ebscohost.com.ezproxy.lib.vutbr.cz/ehost/pdfviewer/pdfviewer?vid=2&sid=548fae80-bd93-4248-88a4-77a577a498c7%40sdc-v-sessmgr03>
- [19] Swing-up of the double pendulum on a cart by feedforward and feedback control with experimental validation. *Automatica* [online]. 2007, 43, 63-71 [cit. 2020-04-03]. Dostupné z: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109806003050>
- [20] Swing-up control of a triple pendulum on a cart with experimental validation. *Automatica* [online]. 2013, 49(3), 801-808 [cit. 2020-04-03]. Dostupné z: [https://www.acin.tuwien.ac.at/file/publications/cds/pre\\_post\\_print/glueck2013.pdf](https://www.acin.tuwien.ac.at/file/publications/cds/pre_post_print/glueck2013.pdf)
- [21] YU, Zhan Dong a Xian Feng WANG. Swing-Up Control by BVP Arithmetic for the Rotational Inverted Pendulum. *Advanced Materials Research* [online]. 2011, 211-212, 515-519 [cit. 2020-04-07]. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.211-212.515. ISSN 1662-8985. Dostupné z: <https://www.scientific.net/AMR.211-212.515>
- [22] Unified method for Swing-up Control of Double Inverted Pendulum Systems. *Advanced Mechatronic Systems* [online]. 2014 [cit. 2020-04-09]. Dostupné z: <https://ieeexplore-ieee-org.ezproxy.lib.vutbr.cz/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=6911611>
- [23] Real-Time Swing-up of Double Inverted Pendulum by Nonlinear Model Predictive Control. *ADCONP Hiroshima* [online]. 2014, , 290-295 [cit. 2020-04-09]. Dostupné z: [http://folk.ntnu.no/skoge/prost/proceedings/adconip-2014/pdf/SUBS61TO80/0068/0068\\_FI.pdf](http://folk.ntnu.no/skoge/prost/proceedings/adconip-2014/pdf/SUBS61TO80/0068/0068_FI.pdf)
- [24] Energy and Passivity Based Control of the Double Inverted Pendulum on a Cart [online]. Mexiko, 2001 [cit. 2020-04-09]. Dostupné z: <http://www.lirmm.fr/~chemori/Temp/Wafa/double%20pendule%20inverse.pdf>

## 7 Použité symboly a zkratky

### Symbols

$\mu$	moment stejnosměrného motoru
$i_a$	proud kotvou stejnosměrného motoru
$c_\phi$	konstanta dána vlastnostmi stejnosměrného motoru
$F$	síla na vozík
$i$	index tělesa soustavy – 0 pro vozík, 1 a 2 pro první resp. druhé rameno
$I_i$	moment setrvačnosti vůči těžišti tělesa
$m_i$	hmotnost
$l_i$	vzdálenost mezi rotační vazbou a těžištěm kyvadla
$L_i$	vzdálenost mezi rotačními vazbami prvního a druhého kyvadla, resp. délka kyvadla
$b_i$	koeficient viskózního tlumení ve vazbě
$R_0$	poloměr řemenice
$\theta_i$	vektor stavových veličin pro jedno těleso (vozík, nebo jedno z kyvadel)
$\theta$	vektor stavových veličin pro celý systém dvojitého inverzního kyvadla
$E_k, T$	kinetická energie
$E_p, V$	potenciální energie
$D$	disipativní složka Lagrangeovy rovnice II. řádu
$W_e$	práce vnějších sil
$P_e$	výkon vnějších sil
$\mathbf{0}$	nulová matice (vektor)
$\mathbf{K}$	řídící matice (vektor)
$\mathbf{Q}, \mathbf{R}$	matice pro návrh LQR nebo matice šumu Kálmánova filtru
$\mathbf{y}$	výstupy systému
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$	stavové matice
$L_f(h), L_g(h)$	Lieova derivace

$q$	zobecněné souřadnice
$u$	vstupy systému
$v$	vstup lineárního systému
$S$	sliding surface
$\sigma$	přepínací funkce SMC
$u_f$	vstup vypočítaný dopředným řízením
$u_b$	vstup vypočítaný zpětným řízením
$L$	Lagrangián
$t$	čas

### Zkratky

LQR	lineární kvadratický regulátor
EKF	rozšířený Kálmánův filtr
UKF	unscented Kálmánův filtr
CPR	počet tiků enkodéru na otáčku – <i>counts per revolution</i>
LTI	lineární neměnný v čase – <i>linear time-invariant</i>
SISO	systém s jedním vstupem a jedním výstupem – <i>single-input single-output</i>
MIMO	systém s více vstupy a výstupy – <i>multiple-input multiple-output</i>
SMC	sliding mode control
NN	neuronová síť – <i>neural network</i>
FBL	feedback linearizace
BVP	okrajový problém – <i>boundary value problem</i>
PI	proporcionálně integrální
ODE	obyčejná diferenciální rovnice – <i>ordinary differential equation</i>
TTL	transistor-transistor-logic (standartní logika)